olimpo

Gabarito - ITA 06/05/2017

Matemática

[redacted]

1	C	5	D	9	A	13	E	17	E				
2	A	6	B	10	C	14	C	18	B				
3	E	7	A	11	A	15	B	19	C				
4	C	8	C	12	D	16	A	20	D				

RESOLUÇÃO SIMULADO IME-ITA
MATEMÁTICA - CICLO 3

Questão 01 - Alternativa C

Reescrevendo a equação, ela se torna:

$$\operatorname{sen} x - \cos x = 1$$

Elevando ao quadrado e desenvolvendo:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - 2\operatorname{sen} x \cos x = 1$$
$$1 - 2\operatorname{sen} x \cos x = 1$$
$$2\operatorname{sen} x \cos x = 0$$

Utilizando a transformação do arco duplo:

$$\operatorname{sen} 2x = 0 = \operatorname{sen} 0$$

Então:

$$2x = 2k\pi \text{ ou } 2x = \pi + 2k\pi$$

O que se conclui que, para um intervalo de $[0, 2\pi]$, os valores de x possíveis são:

$$x = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$$

Porém, deve-se testar a equação original para verificar se esses valores obedecem pois, ao elevarmos ao quadrado, podemos estar "embutindo" raízes que não existem. Testando esses valores, observamos que apenas $\frac{\pi}{2}$ e π são raízes da equação no intervalo pedindo, resultando que a soma será $\frac{3\pi}{2}$.

Questão 02 - Alternativa A

Sabe-se que existe um triângulo retângulo muito conhecido, que é o triângulo 3,4,5. Dentro desse triângulo, observamos que existe um ângulo θ tal que:

$$\theta = \operatorname{arcsen}\frac{3}{5} = \arccos\frac{4}{5}$$

Então, a nossa expressão equivale a:

$$y = \operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2\operatorname{tg}(\theta)}{1 - \operatorname{tg}^2(\theta)}$$

Porém, de acordo com o próprio triângulo 3,4,5:

$$tg(\theta) = \frac{3}{4}$$

Substituindo, obtemos $y = \frac{24}{7}$, então:

$$6 + 14y = 54$$

Questão 03– Alternativa E

Como representa uma função senoidal, a equação apresenta uma equação geral da forma $y = A\text{sen}(Bx + C) + D$. Por inspeção das alternativas, percebe-se que $D = 0$, ou seja, o gráfico não foi transladado verticalmente.

O período da função é o momento em que ela se repete. A distância entre os pontos $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ e $\left(\frac{11\pi}{4};0\right)$ é igual a $\frac{3}{4}$ do período. O período da função é, então, por teoria das proporções:

$$T = \frac{4}{3}\left(\frac{11\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = 3\pi$$

Utilizando a equação abaixo:

$$\frac{2\pi}{B} = T \rightarrow B = \frac{2}{3}$$

O que torna a nossa equação pedida da forma $y = A\text{sen}\left(\frac{2x}{3} + C\right)$. Substituindo agora o ponto $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$, que pertence à função, teremos:

$$A\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + C\right) = 0$$

Como $A \neq 0$, então $\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + C\right) = 0$. Essa equação tem infinitas soluções possíveis, porém, a única que se encaixa nas alternativas da questão é $C = -\frac{\pi}{3}$.

Agora nos resta o parâmetro A. Ele pode ser encontrado a partir do ponto $\left(0,-\sqrt{3}\right)$. Substituindo, chegamos na equação:

$$A\text{sen}(-60^\circ) = -\sqrt{3}$$

O que resulta em $A = 2$. Então nossa função é $y = 2\text{sen}\left(\frac{2x-\pi}{3}\right)$.

Questão 04– Alternativa C

Se $\frac{n+8}{n-7}$ é um inteiro positivo, então:

$$n-7 \mid n+8 \quad (1)$$

Além disso, todo número divide a si mesmo.

$$n-7 \mid n-7 \quad (2)$$

Fazendo (1) - (2):

$$n-7 \mid 15$$

Ou seja, $n-7$ é um dos divisores de 15. Os divisores de 15 são:

$$\{\pm1;\pm3;\pm5;\pm15\}$$

Calculando, então, os possíveis valores de n, obtemos:

$$n \in \{8,6,10,4,12,2,22,-8\}$$

Testando os valores na fração para que se obtenha um inteiro positivo, temos que $n = 8,10,12,$ ou 22. Então a soma de todos os valores possíveis de n será 52.

Questão 05– Alternativa D

Sejam A, B, C os números dos livros de Arthur, Brenna e Clarice. Equacionando o problema, obtemos:

$$\begin{cases} A + B + C = 9 \\ A + C = 2B \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $B = 3$.

O problema combinatório se resume ao seguinte: escolher os três livros de Brenna e, após isso, o restante deve ser distribuído entre Arthur e Clarice. Os livros de Brenna podem ser escolhidos de $\binom{9}{3} = 84$ maneiras. Após isso, cada um dos livros poderá ficar com Arthur ou com Clarice, ou seja, cada livro terá 2 opções de dono.

O número de vezes que isso pode ser feito é 2^6, porém temos que retirar as configurações em que Arthur ou Clarice ficam de mãos vazias, totalizando $2^6 - 2 = 62$ maneiras de distribuir o restante dos livros.

Pelo princípio multiplicativo, o número total de configurações para distribuição será:

$$84 \cdot 62 = 5208$$

Questão 06– Alternativa B

Seja $3x + 4 = a$ e $y - 7 = b$, então:

$$\binom{a}{b} = 120 \quad \binom{a}{b+1} = 210 \quad \binom{a}{b+2} = 252$$

A expressão pedida pode ser expressa por:

$$\binom{a+2}{b+2} = \binom{a+1}{b+1} + \binom{a+1}{b+2}$$

Onde acima foi utilizada a relação de Stiffel. Aplicando novamente a relação de Stiffel em cada uma das parcelas:

$$\binom{a+2}{b+2} = \binom{a}{b} + \binom{a}{b+1} + \binom{a}{b+1} + \binom{a}{b+2}$$

Então:

$$\binom{a+2}{b+2} = \binom{a}{b} + 2\binom{a}{b+1} + \binom{a}{b+2}$$

Substituindo os valores encontrados:

$$\binom{a+2}{b+2} = 120 + 2 \cdot 210 + 252 = 792$$

Questão 07– Alternativa A

A soma pode ser reduzida utilizando a notação de somatório:

$$S = \sum_{k=1}^{30} k(k+1)$$

Sabe-se que:

$$\binom{k+1}{2} = \frac{(k+1)!}{2!(k-1)!} = \frac{k(k+1)}{2}$$

Então, se dividirmos a equação em S em ambos os lados, obtemos:

$$\frac{S}{2} = \sum_{k=1}^{30} \frac{k(k+1)}{2} = \sum_{k=1}^{30} \binom{k+1}{2}$$

$$\frac{S}{2} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{31}{2}$$

Essa é a soma da Coluna 2 do triângulo de pascal até a Linha 31 (começando a contagem a partir da Linha 0 e Coluna 0). Usando o teorema das colunas:

$$\frac{S}{2} = \binom{32}{3} \rightarrow S = 2 \cdot \binom{32}{3} = 9920$$

Questão 08– Alternativa C

Imaginemos a expansão:

$$\underbrace{(a+b+c+d)\cdot(a+b+c+d)\cdot(a+b+c+d)\ldots\cdot(a+b+c+d)}_{12\text{ vezes}}$$

Para obtermos um número da forma $ab^4c^2d^5$, temos que escolher um parêntesis com a, quatro com b, dois com c e cinco com d. Isso pode ser analisado como uma operação combinatória, onde temos a configuração básica: $abbbbccddddd$. O coeficiente será o número de vezes em que essa expressão aparecer, então será equivalente ao número de permutações com repetição da palavra estudada:

$$P_{12}^{1,4,2,5} = \frac{12!}{1!4!2!5!} = 83160$$

Questão 09– Alternativa A

Utilizando a expansão do binômio de Newton:

$$(1+1)^{100} = \binom{100}{0} + \binom{100}{1} + \ldots + \binom{100}{99} + \binom{100}{100} \qquad (3)$$

Novamente, mudando o segundo termo:

$$(1-1)^{100} = \binom{100}{0} - \binom{100}{1} + \ldots - \binom{100}{99} + \binom{100}{100} = 0 \; (4)$$

Subtraindo(3) - (4):

$$2\left[\binom{100}{1} + \binom{100}{3} + \ldots + \binom{100}{97} + \binom{100}{99}\right] = 2^{100}$$

Então a soma pedida é $M = 2^{99}$. Ou seja,

$$\log_2 \sqrt[3]{M} = \log_2 \sqrt[3]{2^{99}} = 33$$

Questão 10– Alternativa C

A fórmula do binômio de Newton é:

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} a^k$$

O coeficiente do terceiro termo será $\binom{n}{2}$ e do segundo $\binom{n}{1}$, pois não há valores numéricos dentro dos termos do binômio pedido na questão e, como o segundo termo é maior que o primeiro, estamos no ramo crescente da linha de Pascal. Então:

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{1} + 44$$

O que resulta na equação:

$$n(n-1) = 88 + 2n$$

Que é uma equação do segundo grau:

$$n^2 - 3n - 88 = 0$$

Cuja raiz positiva é $n = 11$.
A fórmula do termo do binômio é:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} \left(x\sqrt{x}\right)^{11-k} x^{-4k}$$

Temos que encontrar o k tal que esse termo seja independente. Então o expoente do x terá de ser igual a zero. Isso resulta em:

$$\frac{3}{2}(11-k) - 4k = 0$$

Então $k = 3$ e o termo independente será $\binom{11}{3} = 165$.

Questão 11– Alternativa A

Pelas transversais que passam P, todos os quatro triângulos são semelhantes entre si por AA. Observe também que o comprimento de qualquer um dos lados do triângulo maior é igual à soma dos lados de cada um dos lados correspondentes nos triângulos menores. Usamos a $K = \frac{ab\sin C}{2}$ para mostrar que as áreas são proporcionais (os lados são proporcionais e os ângulos são iguais). Portanto, podemos escrever os comprimentos dos lados correspondentes do triângulo como 2x, 3x, 7x. Assim, o lado correspondente no grande triângulo é 12x, e a área do triângulo é $12^2 = 144$.

Questão 12– Alternativa D

Considere S ser um subconjunto não-vazio de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Então a soma alternante de S mais a soma alternada de S com o 7 incluído é 7.
Em termos matemáticos S + (S ∪ 7) = 7. Isto é verdade porque quando tomamos uma soma alternada, cada termo de S tem o sinal oposto de cada termo correspondente de (S ∪ 7).

Note que:
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \quad 6 - 5 + 4 - 3 + 2 - 1$
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = 7 - 6 + 5 - 4 + 3 - 2 + 1$
Então: S + (S ∪ 7) = 7

Como existem 63 desses pares, a soma de todos os subconjuntos possíveis de nosso conjunto dado é 63 . 7. No entanto, esquecemos de incluir o subconjunto que contém apenas 7, por isso a nossa resposta é 64 . 7 = 448.

Questão 13– Alternativa E

As linhas que passam A e C dividem o quadrado em três partes, dois triângulos retângulos e um paralelogramo .
Usando o lado menor do paralelogramo, 1/n como a base,
onde a altura é 1, descobrimos que a área do paralelogramo é A = 1/n.
Pelo teorema de Pitágoras , o maior lado do paralelogramo tem comprimento

$$l = \sqrt{1^2 + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sqrt{2n^2 - 2n + 1},$$

de modo que o paralelogramo tem altura

$$h = \frac{A}{l} = \frac{1}{\sqrt{2n^2 - 2n + 1}}.$$

Mas a altura do paralelogramo é exatamente o lado do quadrado pequeno, assim fazendo $h^2 = 1/1985$ temos:
$2n^2 - 2n + 1 = 1985$
Resolvendo esta equação quadrática n = 32.

Questão 14– AlternativaC

Nós vemos que $f_1(11) = 4$
$f_2(11) = f_1(4) = 16$
$f_3(11) = f_1(16) = 49$
$f_4(11) = f_1(49) = 169$
$f_5(11) = f_1(169) = 256$
$f_6(11) = f_1(256) = 169$
Note que isto gira entre os dois números.
$f_{1988}(169) = 169 \implies f_{1988}(11) = 169$

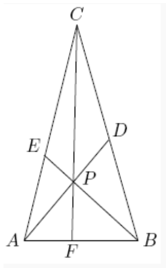
Questão 15– Alternativa B

$$f^{-1}(90)=k \to f(k)=90 \to f(k)=\frac{100}{1+2^{-k}}=90 \to \frac{100}{90}=1+2^{-k} \to 2^k=9$$

$$(g\circ f^{-1})(90)=g(f^{-1}(90))=g(k)=2^{\frac{k}{2}}=\left(2^k\right)^{1/2}=\left(9\right)^{1/2} \to g(k)=\sqrt{9}=3$$

$$(g\circ f^{-1})(90)=3$$

Questão 16– Alternativa A



Usando uma forma diferente do Teorema de Ceva , temos

$$\frac{y}{x+y}+\frac{6}{6+6}+\frac{3}{3+9}=1 \iff \frac{y}{x+y}=\frac{1}{4}$$

Resolvendo $4y=x+y$ e $x+y=20$, obtemos $x=BP=15$ e $y=FP=5$.

Deixe Q ser o ponto em AB tal que $FC \parallel QD$.

$AP=PD$ e $FP \parallel QD$, $QD=2FP=10$. (Teorema de Stewart). Além disso, como

$FC \parallel QD$ e $\quad QD=\dfrac{FC}{2}$

vemos que $FQ=QB$, $BD=DC$ etc. (Teorema de Stewart)

Da mesma forma, temos $PR=RB$
($=\dfrac{1}{2}PB=7.5$) e assim $RD=\dfrac{1}{2}PC=4.5$.

PDR (3-4-5) é triângulo retângulo , então $\angle PDR$($\angle ADQ$) é $90°$.

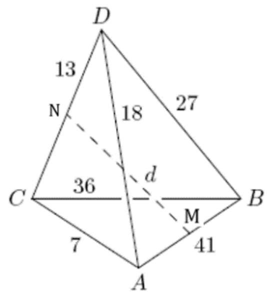
Portanto, a área de $\triangle ADQ=\dfrac{1}{2}\cdot 12\cdot 6=36$.

Usando relação de área $\triangle ABC=\triangle ADB\times 2=\left(\triangle ADQ\times\dfrac{3}{2}\right)\times 2=36\cdot 3=\boxed{108}$

Questão 17– Alternativa E

Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$ e N o ponto médio de $\overline{CD}$. Assim, d é a mediana do triângulo $\triangle CDM$. A fórmula para o comprimento de uma mediana é

$$m = \sqrt{\frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}},$$



onde a, b e c são os comprimentos laterais do triângulo, e c é o lado que é dividida pela mediana m. A fórmula é um resultado direto da Lei de Cossenos aplicada duas vezes com os ângulos formados pela mediana. (Teorema de Stewart).

Primeiro encontramos CM, que é a mediana de $\triangle CAB$.

$$CM = \sqrt{\frac{98 + 2592 - 1681}{4}} = \frac{\sqrt{1009}}{2}$$

Agora devemos encontrar DM, que é a mediana de $\triangle DAB$.

$$DM = \frac{\sqrt{425}}{2}$$

Agora que sabemos os lados de $\triangle CDM$, vamos proceder para encontrar o comprimento de d.

$$d = \frac{\sqrt{548}}{2} \Rightarrow d^2 = \frac{548}{4} = 137$$

Questão 18– Alternativa B

(A) VERDADEIRA. Pelas informações do enunciado percebe-se que $f(x) = f(-x)\ \ \forall\ x \in [-a\ ;\ a]$.

(B) FALSA. Pelo gráfico, no intervalo $]\,d, m\,[$, a função $f(x) > 0,\ g(x) > 0\ \forall\ x\ ]\,d\ ;e\,[$ e $g(x) < 0\ \forall\ x\ ]\,e\ ;m\,[$. Portanto, $f(x)\cdot g(x) < 0$ para o intervalo dado é falso.

(C) VERDADEIRA. Pelo gráfico, $\mathrm{Im}(g) = [\,n, r\,[\cup \{s\}$.

(D)VERDADEIRA. A função $h(x)$ estará definida se $f(x) - g(x) > 0,$ o que é verdade sempre que $-a \le x < -d \quad ou \quad d < x \le a.$

(E) VERDADEIRA. Pelo gráfico verifica-se veracidade na sentença.

Questão 19– Alternativa C

Sendo $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},$ dada por $f(x) = \ell n(2 + x + 3|x| - |x+1|),$ deve-se ter $2 + x + 3|x| - |x+1| > 0.$

Logo, como

$$3|x| - |x+1| = \begin{cases} -2x+1, \text{ se } x < -1 \\ -4x-1, \text{ se } -1 \le x < 0, \\ 2x-1, \text{ se } x \ge 0 \end{cases}$$

vem:

a) se $x < -1,$

$2 + x + 3|x| - |x+1| > 0 \Rightarrow 2 + x - 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < 3$

e, portanto, $S_i =]-\infty, -1[\cap]-\infty, 3[=]-\infty, -1[.$

b) se $-1 \le x < 0,$

$2 + x + 3|x| - |x+1| > 0 \Rightarrow 2 + x - 4x - 1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}.$

Donde $S_{ii} = [-1, 0[\cap \left]-\infty, \frac{1}{3}\right[= [-1, 0[.$

c) se $x \geq 0$,

$$2 + x + 3|x| - |x+1| > 0 \Rightarrow 2 + x + 2x - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}.$$

Logo, $S_{iii} = [0, +\infty[\cap \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[= [0, +\infty[$. Portanto, $A = S_i \cup S_{ii} \cup S_{iii} = \mathbb{R}$.

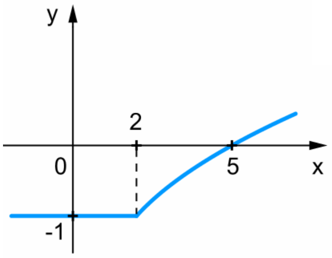
Por outro lado, sendo $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $g(x) = -2 + \frac{\sqrt{2(x + |x-2|)}}{2}$, e sabendo que

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, \text{ se } x \geq 2 \\ -x+2, \text{ se } x < 2 \end{cases},$$

obtemos

$$g(x) = \begin{cases} -2 + \sqrt{x-1}, \text{ se } x \geq 2 \\ -1, \text{ se } x < 2 \end{cases}.$$

Esboçando o gráfico de g, encontramos



Portanto, é fácil ver que $\mathbb{R} \supset B = [-1, +\infty[$. Daí, $A \supset B$.

Questão 20– Alternativa D

$$g(x) + a = \frac{senx + a^2 + a}{a+1}$$

Fazendo $x = \frac{\pi}{4}$, temos:

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) + a = \frac{sen\frac{\pi}{4} + a^2 + a}{a+1} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2}}{8} + a = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + a^2 + a}{a+1} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2}}{8} \cdot a + a^2 + \frac{\sqrt{2}}{8} + a = \frac{\sqrt{2}}{2} + a^2 + a \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2}}{8} \cdot a = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{8} \Rightarrow$$

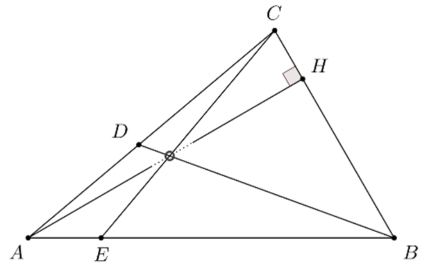
$$a = 3$$

Questões Discursivas

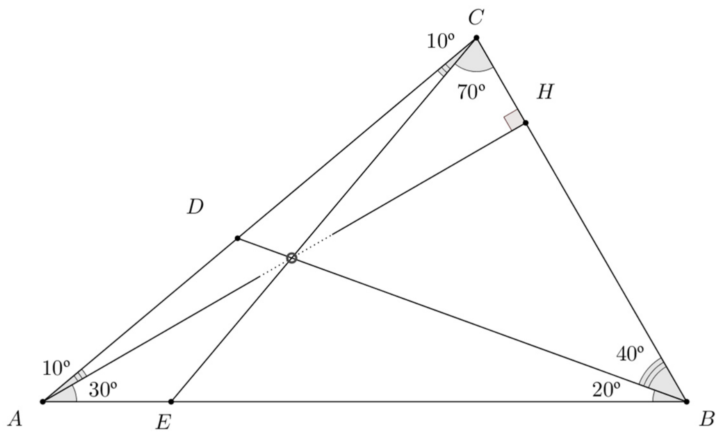
Questão 21

Seja F' o ponto em que AF toca BC. A estratégia dessa questão será a seguinte: traçaremos a altura AH, relativa ao lado BC. Se provarmos que AH, BD e CE são concorrentes, então o ponto $H \equiv F'$, pois só existe um único ponto que divide harmonicamente e internamente um segmento em uma dada razão. Em outras palavras, só pode existir uma única ceviana que passa por F e toca BC.

Desenhando essa figura com a altura AH, obtemos:



A figura foi desenhada de tal forma que não se sabe, ainda, se AH, CE e DB são concorrentes. Agora, utilizando a técnica do "arrastão", podemos descobrir facilmente todos os ângulos em que as cevianas dividem os ângulos do triângulo:



Agora, vamos provar que AH, CE e BD são colineares. Pelo teorema de ceva trigonométrico, a razão dos senos dos ângulos é:

$$\frac{\text{sen}30^\circ}{\text{sen}10^\circ}\cdot\frac{\text{sen}40^\circ}{\text{sen}20^\circ}\cdot\frac{\text{sen}10^\circ}{\text{sen}70^\circ}$$

Se essa razão for 1, o problema está terminado. Simplificando a expressão, obtemos:

$$\frac{1}{2}\frac{\text{sen}40^\circ}{\text{sen}70^\circ\,\text{sen}20^\circ}$$

Como $\text{sen}70^\circ = \cos 20^\circ$, a expressão fica:

$$\frac{\text{sen}40^\circ}{2\text{sen}20^\circ\cos 20^\circ} = 1$$

Onde acima foi utilizada a fórmula do arco duplo. Como AH e AF' são, simultaneamente, concorrentes com CE e BD, então $H \equiv F'$ e $AF \perp BC$.

Questão 22

Para a igualdade da primeira e da segunda equações, temos:

$$m+1=m\rightarrow 1=0 \text{ Absurdo!}$$

$$m+1=(n+1)-m\rightarrow n=2m \qquad (5)$$

E agora, substituindo (5) na segunda e na terceira equações:

$$\binom{2m+1}{m}=\frac{5}{3}\binom{2m+1}{m-1}$$

Desenvolvendo as combinações:

$$\frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}=\frac{5}{3}\frac{(2m+1)!}{(m-1)!(m+2)!}$$

O que resulta em:

$$3(m+2)=5m$$

Então $m=3$ e, por conseguinte, $n=6$. O único par ordenado solução desse sistema de equações é $(m,n)=(3,6)$.

Questão 23

Seja x o número de palavras com um número par de $a's$ e y o número de palavras com um número ímpar de $a's$. De cara, sabemos que o número total de palavras é 3^n, então:

$$x+y=3^n$$

Agora, contando individualmente x e y. Para um número par de $a's$, podemos escolher $0,2,4,6,...$ lugares para pôr o a e os restantes terão 2 possibilidades para cada lugar (as duas letras restantes). O mesmo raciocínio pode ser aplicado para y. Equacionando, obtemos:

$$x=\binom{n}{0}2^n+\binom{n}{2}2^{n-2}+\binom{n}{4}2^{n-4}+\dots$$

$$y=\binom{n}{1}2^{n-1}+\binom{n}{3}2^{n-3}+\binom{n}{5}2^{n-5}+\dots$$

Subtraindo ambas as equações, obtemos:

$$x-y=\binom{n}{0}2^n-\binom{n}{1}2^{n-1}+\binom{n}{2}2^{n-2}-\binom{n}{3}2^{n-3}+\binom{n}{4}2^{n-4}-\dots$$

Esse é o desenvolvimento do binômio $(2-1)^n$. Então:

$$x-y=1$$

Resolvendo, então, o sistema:

$$\begin{cases} x+y=3^n \\ x-y=1 \end{cases}$$

Concluindo:

$$x=\frac{3^n+1}{2}$$

$$\sqrt[n]{2x-1}=3$$

Questão 24

Fazendo a expansão binomial:

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{2017}=\binom{2017}{0}\sqrt{2}^{2017}+\binom{2017}{1}\sqrt{2}^{2016}+\ldots+\binom{2017}{2016}\sqrt{2}^{1}+\binom{2017}{2017}\sqrt{2}^{0}=a+b\sqrt{2}$$

Sabemos também que:

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^{2017}=-\binom{2017}{0}\sqrt{2}^{2017}+\binom{2017}{1}\sqrt{2}^{2016}-\ldots-\binom{2017}{2016}\sqrt{2}^{1}+\binom{2017}{2017}\sqrt{2}^{0}\quad (6)$$

Perceba que, nas expansões acima, quando $\sqrt{2}$ apresenta expoentes pares, não haverá $\sqrt{2}$ no termo e a soma dos termos inteiros será o mesmo da equação original. Além disso, na mesma Equação (6), os coeficientes do termo $\sqrt{2}$ também serão os mesmos da equação original, porém com sinal trocado. Então:

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^{2017}=-\binom{2017}{0}\sqrt{2}^{2017}+\binom{2017}{1}\sqrt{2}^{2016}-\ldots-\binom{2017}{2016}\sqrt{2}^{1}+\binom{2017}{2017}\sqrt{2}^{0}=a-b\sqrt{2}$$

Dividindo a expressão acima por $\left(1-\sqrt{2}\right)$, obtemos o resultado esperado:

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^{2016}=\frac{a-b\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

Podemos racionalizar a expressão, para tornar a resposta mais elegante:

$$\frac{a-b\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)}=\left(2+\sqrt{2}\right)b-\left(1+\sqrt{2}\right)a$$

Questão 25

Sejam $T_1,T_2,\ldots,T_{11}$ os termos da expansão pedida. Representando:

$$\left(2x^7-4y^8\right)^{10}=T_1+T_2+T_3+T_4+\ldots+T_{10}+T_{11}\qquad (7)$$

Agora, fazendo a expansão abaixo, percebemos que os termos pares terão os sinais trocados, pois não terão mais o sinal negativo elevado a um expoente ímpar.

$$\left(2x^7+4y^8\right)^{10}=T_1-T_2+T_3-T_4\ldots-T_{10}+T_{11}\quad (8)$$

Subtraindo (7) - (8), obtemos:

$$2\left(T_2+T_4+T_6+T_8+T_{10}\right)=\left(2x^7-4y^8\right)^{10}-\left(2x^7+4y^8\right)^{10}$$

Então:

$$T_2+T_4+T_6+T_8+T_{10}=\frac{\left(2x^7-4y^8\right)^{10}-\left(2x^7+4y^8\right)^{10}}{2}$$

Para obter a soma dos coeficientes, como só nos interessa os valores numéricos, basta retirar a influência de x e de y fazendo $x=y=1$. Então:

$$T_2+T_4+T_6+T_8+T_{10}=\frac{2^{10}-6^{10}}{2}=2^9\left(3^{10}-1\right)$$

Questão 26

Analisando os intervalos do gráfico:
Em $]-\infty\,,0\,[$, podemos verificar que $f(x)<0$ e $g(x)>0$.

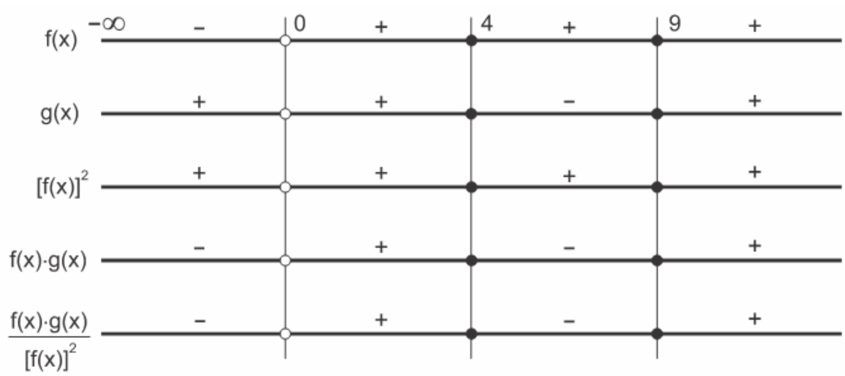
Assim, para este intervalo a equação $\dfrac{g(x)\cdot f(x)}{[f(x)]^2}<0$.

Já no intervalo $[4\,,9]$ percebe-se que $f(x)>0$ e $g(x)\le 0$.

Assim, para este intervalo a equação $\dfrac{g(x)\cdot f(x)}{[f(x)]^2}\le 0$.

Conclui-se portanto que $\dfrac{g(x)\cdot f(x)}{[f(x)]^2}\le 0\ \forall\ x\in\,]-\infty\,,0\,[\,\cup[4\,,9]$.

Outra maneira é resolver a questão graficamente:



Questão 27

Pelas propriedades do enunciado:

$$\begin{cases} f(3n)=a \\ f(3n+1)=h(f(3n),f(1))=h(a.b)=b \\ f(3n+2)=h(f(3n+1),f(1))=h(b,b)=c \end{cases}$$

$Logo, H=\{h\,|\,h=3n+2, n\in\mathbb{Z}\}$

Questão 28

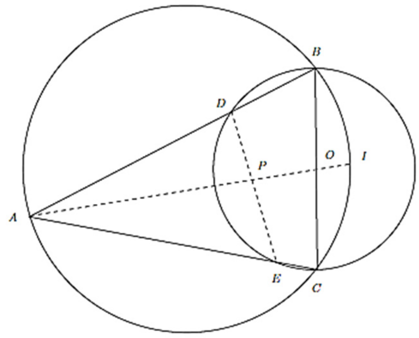
$$\begin{cases} f(1990) = f(2\times 995) = 2f(995)+1 \\ f(f(248) = 4\times 248+3 = 995 \Rightarrow f(995) = f(f(f(248))) = 4\times f(248)+3 \\ f(248) = f(2\times 124) = 2f(124)+1 \\ f(124) = f(2\times 62) = 2f(62)+1 \\ f(62) = f(2\times 31) = 2f(31)+1 \Rightarrow f(31) = f(f(f(7))) = 4\times f(7)+3 \\ f(f(1)) = f(f(f(1))) = 4\times f(1)+3 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} f(7) = 4\times f(1)+3 = 7 \\ f(31) = 2f(31)+1 = 63 \\ f(124) = 2f(62)+1 = 127 \\ f(248) = 2f(124)+1 = 255 \\ f(995) = 4\times f(248)+3 = 1023 \\ f(1990) = 2f(995)+1 = 2047 \end{cases}$$

Questão 29

Inicialmente:



III. Sejam r o raio de (O) e I a outra interseção da corda AO, com O entre A e I, com o círculo circunscrito ao triângulo ABC. Do conceito de potência do ponto O em relação a este círculo tem-se:

$$OA\cdot OI = OB\cdot OC = r^2 \Rightarrow OI = \frac{r^2}{OA}$$

que é constante, pois A e O são fixos. Logo, o ponto I é fixo.

I. Como A, B, C, I estão sobre o mesmo círculo, então $\angle BCA = \angle BIA$. Como $\angle BCE$ *e* $\angle BDE$ são ângulos opostos do quadrilátero inscritível BDEC, então $\angle BCE + \angle BDE = 180°$. Como $\angle BCE = \angle BCA$, $\angle BIA = \angle BIP$ e $\angle BDE = \angle BDP$ então tem-se que

$\angle BIP + \angle BDP = 180°$

De forma que o quadrilátero BIPD é inscritível.

II. Para verificar que P é fixo, sejam as potências P_1, de A em relação a (O), e P_2, de A em relação as círculo circunscrito ao quadrilátero BIPD, dadas por

$$\begin{cases} P_1 = AD\cdot AB = (AO-r)(AO+r) \\ P_2 = AD\cdot AB = AP\cdot AI \end{cases}$$

E assim

$$AP = \frac{AO^2 - r^2}{AI}$$

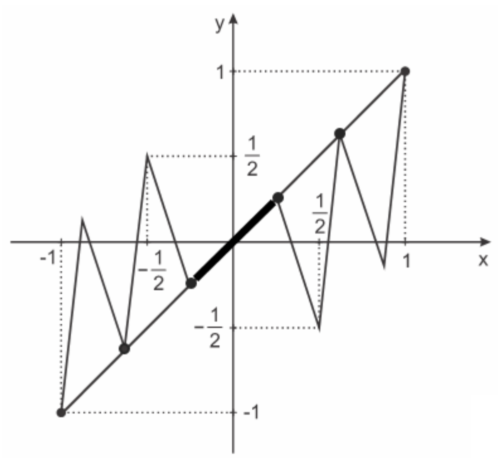
Logo, como I é fixo, AP é constante, com P sobre AO, e então P é fixo.

Questão 30

Temos

$$f_2(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}(3(4x+3)+2)-\frac{1}{4}, \text{ se } -1\le 4x+3\le -\frac{1}{2}\\ \frac{3}{4}(-(4x+3))-\frac{1}{4}, \text{ se } -\frac{1}{2}<4x+3<\frac{1}{2}\\ \frac{3}{4}(3(4x+3)-2)-\frac{1}{4}, \text{ se } \frac{1}{2}\le 4x+3\le 1\\ -\frac{1}{2}(3\cdot 2x+2), \text{ se } -1\le 2x\le -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}(-2x), \text{ se } -\frac{1}{2}<2x<\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}(3\cdot 2x-2), \text{ se } \frac{1}{2}\le 2x\le 1\\ \frac{3}{4}(3(4x-3)+2)+\frac{1}{4}, \text{ se } -1\le 4x-3\le -\frac{1}{2}\\ \frac{3}{4}(-(4x-3))+\frac{1}{4}, \text{ se } -\frac{1}{2}<4x-3<\frac{1}{2}\\ \frac{3}{4}(3(4x-3)-2)+\frac{1}{4}, \text{ se } \frac{1}{2}\le 4x-3\le 1\end{cases}=\begin{cases}9x+8, \text{ se } -1\le x\le -\frac{7}{8}\\ -3x-\frac{5}{2}, \text{ se } -\frac{7}{8}<x<-\frac{5}{8}\\ 9x+5, \text{ se } -\frac{5}{8}\le x\le -\frac{1}{2}\\ -3x-1, \text{ se } -\frac{1}{2}\le x\le -\frac{1}{4}\\ x, \text{ se } -\frac{1}{4}<x<\frac{1}{4}\\ -3x+1, \text{ se } \frac{1}{4}\le x\le \frac{1}{2}\\ 9x-5, \text{ se } \frac{1}{2}\le x\le \frac{5}{8}\\ -3x+\frac{5}{2}, \text{ se } \frac{5}{8}<x<\frac{7}{8}\\ 9x-8, \text{ se } \frac{7}{8}\le x\le 1\end{cases}$$

Onde o gráfico de f_2 e da função identidade é:



Em consequência, as abscissas dos pontos de interseção do gráfico de f_2 com o gráfico da função identidade são tais que $x=-1$, $x=-\frac{5}{8}$, $x=\frac{5}{8}$, $x=1$ e $x\in\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$.