

## MATEMÁTICA

### ▶ Questão 01

Números palíndromos na base  $b$  são números cuja representação nesta base é simétrica, ou seja, se os seus algarismos forem lidos de trás para frente obtém-se o mesmo número. A quantidade de números naturais positivos menores ou iguais a  $(377)_8$ , que são palíndromos na base dois é

- a) 16
- b) 26
- c) 30
- d) 31
- e) 32

Observação: Considere que todo número não nulo na base 2 começa por 1.

#### Resolução:

Inicialmente, percebemos que  $(377)_8 = 3 \cdot 64 + 7 \cdot 8 + 7 = 255$ .

Então, estamos em busca dos números  $n$  tais que  $1 \leq n < 256$ , ou seja,  $(1)_2 \leq n < (100000000)_2$ .

Temos, portanto, com:

- 1 algarismo -  $(1)_2$ , 1 número.
- 2 algarismos -  $(11)_2$ , 1 número.
- 3 algarismos -  $(101)_2$  e  $(111)_2$ , 2 números.
- 4 algarismos -  $(1001)_2$  e  $(1111)_2$ , 2 números.
- 5 algarismos - números da forma  $(1xyx1)_2$ , em que  $x$  e  $y$  podem ser 0 ou 1. Portanto, temos 4 números nesse caso.
- 6 algarismos - números da forma  $(1xyyx1)_2$ , em que  $x$  e  $y$  podem ser 0 ou 1. Portanto, temos 4 números nesse caso.
- 7 algarismos - números da forma  $(1xyzyx1)_2$ , em que  $x$ ,  $y$  e  $z$  podem ser 0 ou 1. Portanto, temos 8 números nesse caso.
- 8 algarismos - números da forma  $(1xyzzyx1)_2$ , em que  $x$ ,  $y$  e  $z$  podem ser 0 ou 1. Portanto, temos 8 números nesse caso.

A quantidade pedida é, portanto,  $1+1+2+2+4+4+8+8=30$ .

#### Alternativa C

▶ **Questão 02**

Seja:  $f : [3, \infty) \rightarrow B$  a função definida por

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x-1}} \right)^n,$$

onde  $B = \{f(a) | a \in [3, \infty)\}$ .

A soma das coordenadas do ponto pertencente ao gráfico da função inversa de  $f(x)$  mais próximo do eixo das abscissas é

- a) -1
- b) 0
- c) 1
- d) 3
- e) 4

**Resolução:**

Para o intervalo  $x \in [3, \infty)$ , temos  $\frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x-1}} < 1$ . Portanto, o somatório é uma soma infinita de uma P.G., com  $a_1 = q = \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x-1}}$ . Assim:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x-1}} \right)^n = \frac{\frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x-1}}}{1 - \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x-1}}}$$

Com  $x \in [3, \infty)$ ,  $\sqrt{x-1} \neq 0$ . Então:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x-1}} \right)^n = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2}} - 1$$

A função, portanto, pode ser escrita como

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2}}$$

Trata-se de um ramo de parábola cujo ponto mais próximo ao eixo  $y$  é o  $(3,1)$ , para o domínio considerado. Portanto, a função inversa será um ramo de parábola cujo ponto mais próximo do eixo das abscissas é o  $(1,3)$ .

$$1 + 3 = 4.$$

**Alternativa E.**

▶ **Questão 03**

Considere a sequência de números complexos  $z_1 = (1+i)$ ,  $z_2 = (1+i)^2$ , ...,  $z_{20} = (1+i)^{20}$ , onde  $i^2 = -1$ .

A maior área possível do triângulo formado pelos afixos de três números consecutivos dessa sequência é

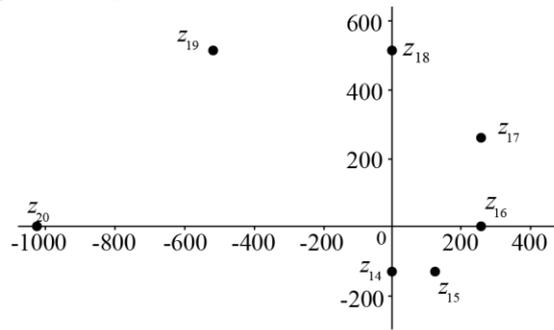
- a)  $2^{16}$
- b)  $2^{17}$
- c)  $2^{18}$
- d)  $2^{19}$
- e)  $2^{20}$

**Resolução:**

Inicialmente, montemos a tabela com os 7 últimos valores da sequência, para entendermos como ela se comporta.

| Número complexo       | Parte real | Parte imaginária |
|-----------------------|------------|------------------|
| $z_{14} = (1+i)^{14}$ | 0          | -128             |
| $z_{15} = (1+i)^{15}$ | 128        | -128             |
| $z_{16} = (1+i)^{16}$ | 256        | 0                |
| $z_{17} = (1+i)^{17}$ | 256        | 256              |
| $z_{18} = (1+i)^{18}$ | 0          | 512              |
| $z_{19} = (1+i)^{19}$ | -512       | 512              |
| $z_{20} = (1+i)^{20}$ | -1024      | 0                |

Com isso, podemos plotar esses pontos no plano de Argand-Gauss.



Os números complexos da sequência, à medida que há aumento de uma unidade no índice, estão sendo rotacionados em  $45^\circ$  (visto que  $1+i = \sqrt{2}\text{cis}45^\circ$ ) e tendo seus módulos multiplicados por  $\sqrt{2}$ .

Com isso, como o problema fala de área de triângulos cujos afixos são complexos consecutivos da sequência, o cálculo dessas áreas se torna simples, algebricamente  $\left(\frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}\right)$ , de se fazer:

$$\begin{aligned} [z_{20}z_{19}z_{18}] &= \frac{512 \cdot 512}{2} = 2^{17} \\ [z_{19}z_{18}z_{17}] &= \frac{512 \cdot 256}{2} = 2^{16} \\ [z_{18}z_{17}z_{16}] &= \frac{256 \cdot 256}{2} = 2^{15} \\ [z_{17}z_{16}z_{15}] &= \frac{256 \cdot 128}{2} = 2^{14} \\ &\vdots \\ [z_3z_2z_1] &= \frac{2 \cdot 1}{2} = 2^0 \end{aligned}$$

Dessa forma, a maior área possível pedida é  $2^{17}$ .

**Alternativa B.**

**▶ Questão 04**

Seja a equação  $x^2 - px + q = 0$ , na variável  $x$ , com raízes  $a$  e  $b$ . Então o valor de  $a^4 + b^4$  é

- a)  $p^4 + 4q^2 - 2p^2q$
- b)  $p^4 + 4q^2 - 4p^2q$
- c)  $p^4 + 2q^2 - 4p^2q$
- d)  $p^4 + 4q^2 - 4p^4q$
- e)  $p^4 + 2q^2 - 2p^2q$

**Resolução:**

Sabemos, pelas relações de Girard, que  $a+b = p$  e que  $ab = q$ .

Com isso, temos:

$$(a^2 + b^2)^2 = a^4 + b^4 + 2(ab)^2 \Rightarrow a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2q^2 \text{ (Eq. 1)}$$

Porém, também é verdade que

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = p^2 - 2q \text{ (Eq. 2)}$$

Substituindo a Eq. 2 na Eq. 1, temos:

$$a^4 + b^4 = (p^2 - 2q)^2 - 2q^2 = p^4 + 2q^2 - 4p^2q$$

**Alternativa C.**

▶ **Questão 05**

Sejam  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  as raízes da equação  $x^3 + 6x^2 - 6x - 3 = 0$ .

O valor de  $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$  é

- a) 12
- b) 18
- c) 27
- d) 33
- e) 42

**Resolução:**

Pelas relações de Girard, sabe-se que  $\alpha + \beta = -6 - \gamma$ , que  $\beta + \gamma = -6 - \alpha$  e que  $\gamma + \alpha = -6 - \beta$ . Com isso, temos:

$$(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = -(\alpha + 6)(\beta + 6)(\gamma + 6)$$

Desenvolvendo essa expressão, obtemos:

$$-\left[ \underbrace{36(\alpha + \beta + \gamma)}_{-6} + 6(\underbrace{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma}_{-6}) + \underbrace{\alpha\beta\gamma + 216}_3 \right] = 33$$

**Alternativa D.**

▶ **Questão 06**

Considere a matriz quadrada  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & 2022 \\ 2 & x & 1 & 2 & 3 & \dots & 2022 \\ 2 & 0 & x & 2 & 3 & \dots & 2022 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & x \end{bmatrix}$  de ordem 2024.

A soma das raízes do polinômio dado por  $p(x) = \det(A)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , é

- a)  $2024 \times 2023$
- b)  $2025^2$
- c)  $2024 \times 2025$
- d)  $1012 \times 2025$
- e)  $1011 \times 2023$

**Resolução:**

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & 2022 \\ 2 & x & 1 & 2 & 3 & \dots & 2022 \\ 2 & 0 & x & 2 & 3 & \dots & 2022 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & x \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & 2022 \\ 1 & x & 1 & 2 & 3 & \dots & 2022 \\ 1 & 0 & x & 2 & 3 & \dots & 2022 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & x \end{vmatrix}$$

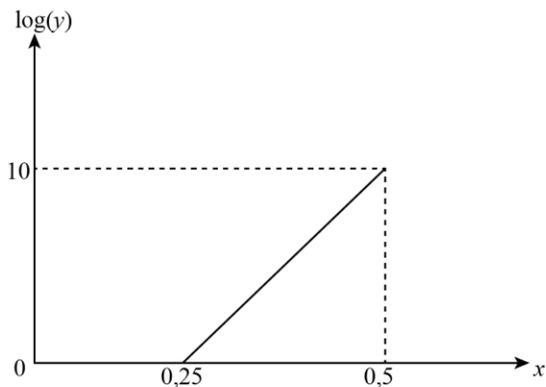
Como se trata de um polinômio de grau 2023, devemos ter 2023 raízes. Pelo determinante, para que cada coluna seja formada por todos os elementos iguais, basta termos  $x = 0, x = 1, \dots, x = 2022$ . Assim, por inspeção, as 2023 raízes formam o conjunto:  $\{0, 1, 2, 3, \dots, 2022\}$ .

A soma das raízes do polinômio será  $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 2022 = 1011 \cdot 2023$ .

**Alternativa E.**

▶ **Questão 07**

Seja  $y = a^{b \cdot x - 10}$ ,  $a$  e  $b$  reais, onde os valores de  $x$  e  $\log(y)$  são relacionados pelo gráfico abaixo.



Então, o valor da  $a + b$  é

- a) 20
- b) 30
- c) 40
- d) 50
- e) 60

---

**Resolução:**

Do gráfico, temos a seguinte relação linear:

$$\log(y) = 40 \cdot (x - 0,25) = 40x - 10$$

Portanto:

$$y = 10^{40x - 10}$$

Dessa forma,  $a + b = 10 + 40 = 50$ .

**Alternativa D.**

▶ **Questão 08**

São dados os pontos A e B sobre uma circunferência de raio  $r$ , de forma que a corda  $\overline{AB}$  mede  $r$ . Escolhe-se ao acaso um ponto C sobre o maior arco  $\overline{AB}$ . A probabilidade da área do triângulo ABC ser maior que  $\frac{r^2 \sqrt{3}}{4}$  é

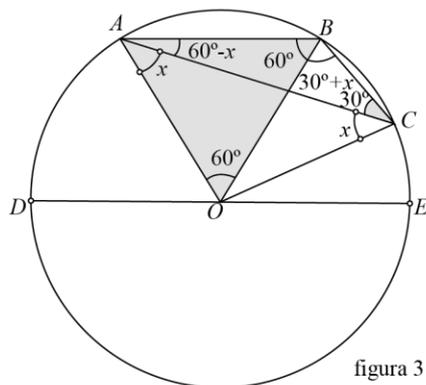
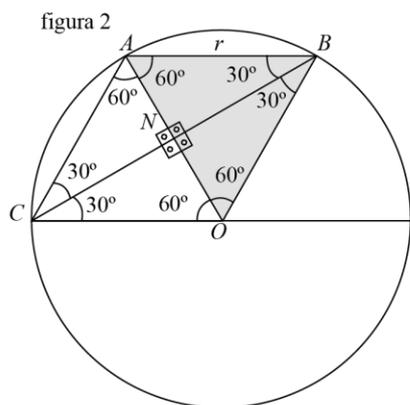
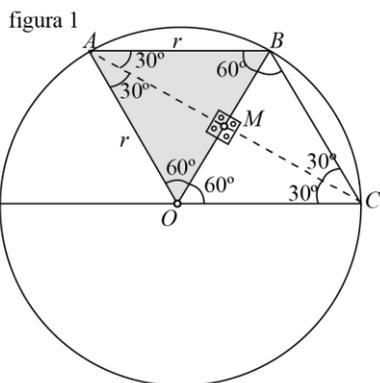
- a)  $\frac{1}{5}$
- b)  $\frac{2}{5}$
- c)  $\frac{1}{2}$
- d)  $\frac{3}{5}$
- e)  $\frac{4}{5}$

---

**Resolução:**

$\Delta OAB$ : equilátero de lado  $r$  (enunciado)

(1) As figuras 1 e 2 ilustram as situações limítrofes para o vértice C do  $\Delta OAB$ , ou seja, quando  $(ABC) = (OAB) = \frac{r^2 \sqrt{3}}{4}$



(2) A figura 3 ilustra uma situação em que  $(ABC) < (OAB)$ . Nesses casos  $30^\circ < x < 60^\circ$ .

(3) Para que  $(ABC)$  seja maior que  $(OAB) = \left(\frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right)$ ,  $C$  deve se situar no arco inferior  $DE$ , que mede  $180^\circ$ . Sendo  $AB = 300^\circ$ , a probabilidade

pedida é:  $P = \frac{180}{300} \therefore P = \frac{3}{5}$

**Alternativa D.**

**Questão 09**

Considere a inequação

$$(x^2 - 100)(x^2 - 150)(x^2 - 200) < 0$$

A quantidade de números inteiros que a satisfazem é

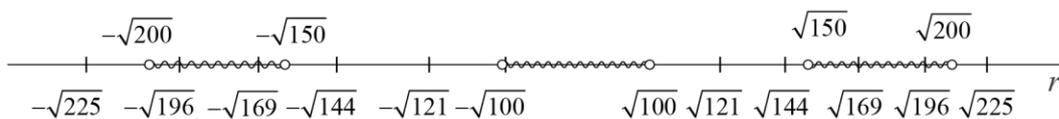
- a) 23
- b) 24
- c) 25
- d) 26
- e) 27

**Resolução:**

Fazendo o estudo dos sinais de cada fator do produto à direita da desigualdade, temos:

- $x^2 < 100 \Rightarrow -\sqrt{100} < x < \sqrt{100}$
- $x^2 < 150 \Rightarrow -\sqrt{150} < x < \sqrt{150}$
- $x^2 < 200 \Rightarrow -\sqrt{200} < x < \sqrt{200}$

Montando uma linha numérica, as soluções de interesse para a inequação pertencem aos intervalos assinalados abaixo.



Ou seja, as soluções inteiras são  $\{-14, -13, -9, -8, -6, -5, \dots, 5, 6, 7, 8, 9, 13, 14\}$  - totalizando 23 soluções inteiras.

**Alternativa A.**

▶ **Questão 10**

Seja  $r = \sqrt{3 - \sqrt{3} + \sqrt{2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3 + \sqrt{\sqrt{2} - \sqrt{12} + \sqrt{18 - \sqrt{128}}}}}}$ . Sobre a inequação  $\sqrt{2025 + \sqrt{t}} + \sqrt{2025 - \sqrt{t}} \leq \sqrt{2025r}$  pode-se afirmar que a mesma

- a) não possui solução real
- b) possui uma única solução real
- c) possui exatamente duas soluções reais
- d) possui solução entre 0 e  $\frac{2025^2}{6}$
- e) possui solução entre  $\frac{2025^2}{3}$  e  $\frac{2025^2}{2}$

**Resolução:**

Primeiramente, lembremos que

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

Assim, a expressão para  $r$  pode ser reduzida para

$$r = \sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3 + \sqrt{\sqrt{2} - \sqrt{12} + \sqrt{18 - \sqrt{128}}}}}}} = \sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3 + \sqrt{4 - \sqrt{12}}}}}}$$
$$r = \sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{2 + 2\sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} = \sqrt{3 - \sqrt{4 + \sqrt{12}}} = \sqrt{3 + 1} = 2$$

Com isso, a inequação passa a ser  $\sqrt{2025 + \sqrt{t}} + \sqrt{2025 - \sqrt{t}} \leq \sqrt{2025 \cdot 2}$ . Podemos elevar ambos os lados ao quadrado, pois todos os termos são positivos.

$$\text{Assim, } 2025 + \sqrt{t} + 2025^2 - t + 2025 - \sqrt{t} \leq 2025 \cdot 2 \Rightarrow t \geq 2025^2.$$

Devemos avaliar as condições de existência:  $2025 - \sqrt{t} \geq 0 \Rightarrow t \leq 2025^2$ .

Dessa forma, a única solução possível é  $t = 2025^2$ .

**Alternativa B.**

▶ **Questão 11**

O número de soluções da equação  $\cos^3(x)\sin^3(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) = 1$  no intervalo  $[0, 2\pi)$  é

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- e) 4

**Resolução:**

Sabemos que:

$$\begin{aligned} \sin^3 x + \cos^3 x &= (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) \\ \frac{1}{2} \sin 2x &= \sin x \cos x \end{aligned}$$

Substituindo as identidades acima na expressão do problema, temos:

$$(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = 1 - \sin x \cos x$$

**Caso 1**

$$1 - \sin x \cos x = 0$$

Nesse caso,  $\sin x \cos x = 1 \Rightarrow \sin 2x = 2$  (Absurdo!).

**Caso 2**

$$\sin x + \cos x = 1$$

Multiplicando, em ambos os lados, a equação por  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  e considerando que  $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , temos:

$$\sin x \sin \frac{\pi}{4} + \cos x \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{4}$$

As soluções dessa equação são  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  e  $x = 2k\pi$ .

Como  $x \in [0, 2\pi)$ , então,  $x = 0$  ou  $x = \frac{\pi}{2}$ . Portanto, o número de soluções para a equação no intervalo solicitado é igual a 2.

Alternativa C.

**Questão 12**

Considere um triângulo com vértices em  $A(1, 2)$ ,  $B(2, 2)$  e  $C(4, 0)$ .

A equação da reta que é a bissetriz interna do triângulo referente ao vértice  $A$  é

- a)  $2x + (3 - \sqrt{13})y + (2\sqrt{13} - 8) = 0$
- b)  $2x + (3 + \sqrt{13})y - (2\sqrt{13} + 8) = 0$
- c)  $x + (4 + \sqrt{13})y - (2\sqrt{13} + 9) = 0$
- d)  $x + (4 - \sqrt{13})y + (2\sqrt{13} - 9) = 0$
- e)  $(3 + \sqrt{13})x + 2y - (\sqrt{13} + 7) = 0$

**Resolução:**

**1ª Solução**

Os vetores que são os lados do triângulo são

$$\vec{AB} = (1, 0) \text{ e } \vec{AC} = (3, -2)$$

Como queremos a reta da bissetriz, a direção dessa reta será dada pela soma dos versores desses lados:

$$\vec{AB} = (1, 0) \text{ e } \vec{AC} = \left( \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{-2}{\sqrt{13}} \right)$$

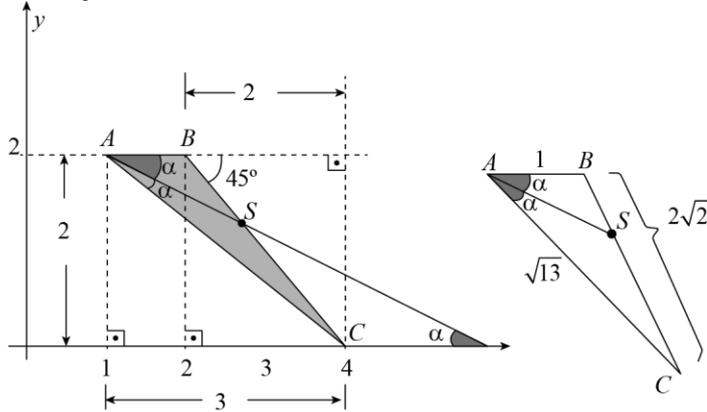
Portanto, os pontos da reta que é a bissetriz são do tipo

$$(x, y) = \left( 1 + \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{-2}{\sqrt{13}} \right) \cdot k + (1, 2), \text{ com } k \in \mathbb{R}$$

Dessa equação paramétrica, obtemos:

$$x = \left( 3 + \sqrt{13} \right) \frac{2-y}{2} + 1 \Rightarrow 2x + (3 + \sqrt{13})y - (2\sqrt{13} + 8) = 0$$

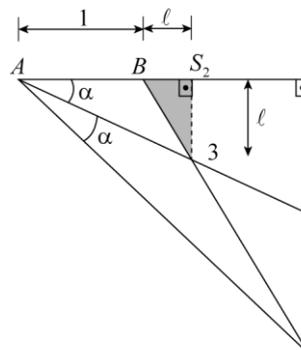
**2ª Solução**



$$\triangle ABC: \frac{SB}{AB} = \frac{SC}{AC} = \frac{SB+SC}{AB+AC} = \frac{BC}{AB+AC} \therefore SB = \frac{2\sqrt{2}}{(1+\sqrt{13})} \quad (1)$$

$$BS_2 = \ell = BS \cdot \cos 45^\circ = \frac{2\sqrt{2}}{(1+\sqrt{13})} \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\therefore \ell = \frac{2}{1+\sqrt{13}} \quad (2)$$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\ell}{1+\ell} = \frac{\frac{2}{(1+\sqrt{13})}}{1+\frac{2}{(1+\sqrt{13})}} = \frac{\left(\frac{2}{1+\sqrt{13}}\right)}{\frac{3+\sqrt{13}}{(1+\sqrt{13})}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{(\sqrt{13}+3)} \quad (3)$$

$$m = -\operatorname{tg} \alpha \therefore m = -\frac{2}{3+\sqrt{13}} \leftarrow \text{coeficiente angular da reta } \overline{AS} \quad (4)$$

$$y - y_A = m \cdot (x - x_A) \therefore y - 2 = -\frac{2}{(3+\sqrt{13})} \cdot (x - 1)$$

$$\therefore (3+\sqrt{13})y - 6 - 2\sqrt{13} = -2x + 2$$

$$\therefore 2x + (3+\sqrt{13})y - (2\sqrt{13}+8) = 0$$

**Alternativa B.**

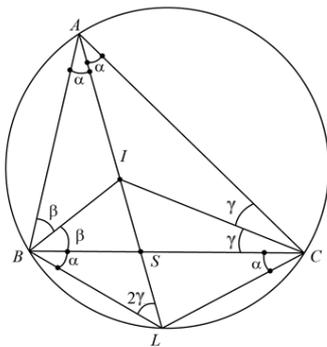
**▶ Questão 13**

Seja  $I$  o incentro do triângulo  $ABC$  e  $L$  a interseção da semi-reta  $\overline{AI}$  com a circunferência circunscrita ao triângulo  $ABC$ , com  $A$  e  $L$  distintos.

Dado que  $\overline{AB} + \overline{AC} = 2\overline{BC}$ , o valor de  $\frac{\overline{BL}}{\overline{AL}}$  é

- a)  $\frac{1}{2}$
- b) 1
- c)  $\frac{3}{2}$
- d) 2
- e)  $\frac{5}{2}$

**Resolução:**



Seja  $S$  o pé da bissetriz interna relativa ao vértice  $A$ .

Fazendo  $\alpha = \frac{A}{2}, \beta = \frac{B}{2}$  e  $\gamma = \frac{C}{2}$ , montamos a figura acima.

$$(1). \quad \triangle ABL \sim \triangle ASC (AA) \therefore \frac{BL}{AL} = \frac{SC}{AC}$$

$$(2). \quad \frac{SC}{AC} = \frac{SB}{AB} = \frac{SC+SB}{AC+AB} = \frac{BC}{AB+AC} \quad (TBI \text{ e propriedade das proporções})$$

$$(3). \quad AB+AC = 2 \cdot (BC) \quad (\text{enunciado})$$

$$\text{De (1), (2) e (3): } \frac{BL}{AL} = \frac{SC}{AC} = \frac{BC}{AB+AC} = \frac{BC}{2 \cdot (BC)} = \frac{1}{2}$$

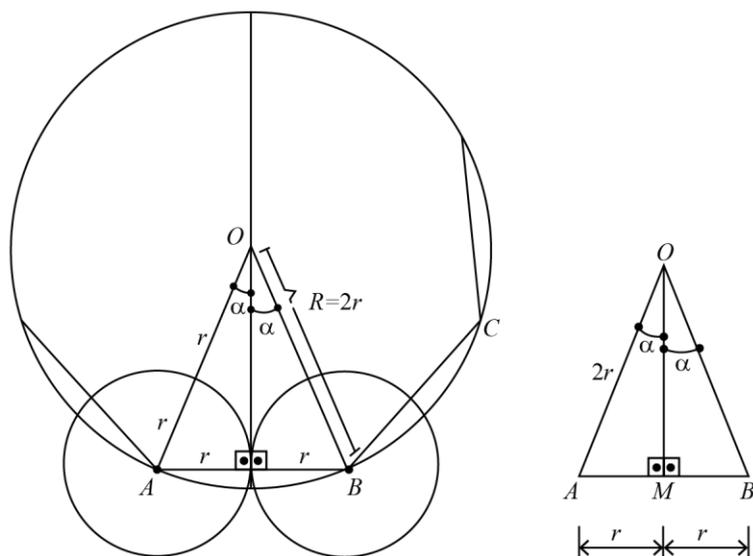
**Alternativa A.**

▶ **Questão 14**

São dados  $n$  círculos de mesmo raio  $r$ , cujos centros são os vértices de um polígono regular  $P$  de  $n$  lados, de forma que cada círculo tangencia externamente dois outros círculos. Seja  $R$  o raio do círculo circunscrito a  $P$ . O valor de  $n$  quando  $R = 2r$  é

- a) 3
- b) 4
- c) 5
- d) 6
- e) 8

**Resolução:**



Sejam  $A$  e  $B$  os centros de dois dos círculos tangentes e  $M$  o ponto médio de  $\overline{AB}$ .

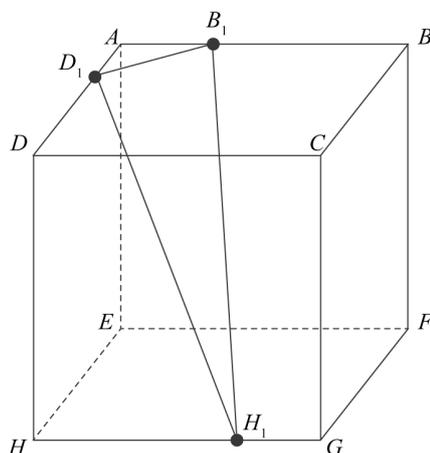
Se  $\alpha = \frac{360^\circ}{2n}$ , temos, no  $\triangle OAM$ :

1.  $\text{sen}\left(\frac{360^\circ}{2n}\right) = \text{sen}\alpha = \frac{AM}{OA} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2} \therefore \alpha = 30^\circ$
2.  $\frac{360^\circ}{2n} = 30^\circ \Rightarrow n = 6$

**Alternativa D.**

▶ **Questão 15**

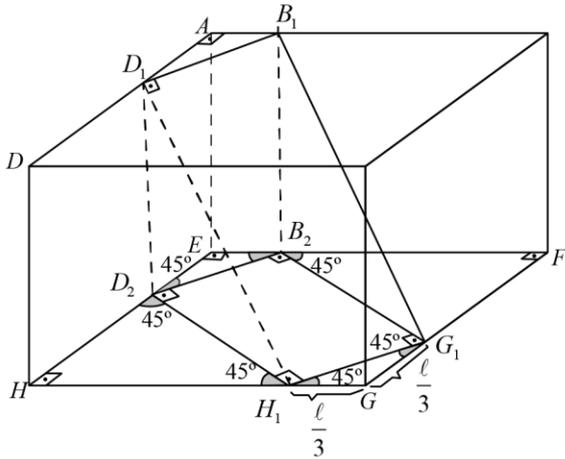
No cubo  $ABCDEFGH$ , a aresta mede  $l$ . Conforme a figura, o ponto  $B_1$ , sobre a aresta  $AB$ , é tal que  $\overline{AB_1} = l/3$ ; o ponto  $D_1$ , sobre a aresta  $AD$ , é tal que  $\overline{AD_1} = l/3$  e o ponto  $H_1$ , sobre a aresta  $GH$ , é tal que  $\overline{GH_1} = l/3$ .



A área do triângulo  $B_1D_1H_1$  é

- a)  $\frac{l^2}{9}$
- b)  $\frac{l^2\sqrt{3}}{18}$
- c)  $\frac{5l^2\sqrt{34}}{18}$
- d)  $\frac{2l^2\sqrt{2}}{9}$
- e)  $\frac{l^2\sqrt{34}}{18}$

**Resolução:**

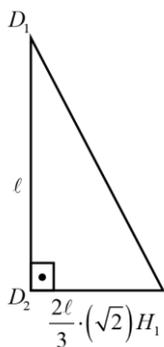


Sejam  $B_2$  e  $D_2$  as projeções ortogonais de  $B_1$  e  $D_1$ , respectivamente, sobre a face  $EFGH$ . Seja  $G_1$  um ponto de  $\overline{FG}$  tal que  $FG_1 = \frac{2l}{3}$ .

Formam-se os triângulos retângulos isósceles  $ED_2B_2$ ,  $HD_2H_1$ ,  $H_1GG_1$  e  $FB_2G_1$ . Daí, decorre que o quadrilátero  $D_2B_2G_1H_1$  é um retângulo. Temos:

- (1)  $\overline{D_1D_2} \perp \text{face}(EFGH)$
- (2)  $\overline{H_1G_1} \subset \text{face}(EFGH)$
- (3)  $\overline{D_2H_1} \perp \text{face} \overline{H_1G_1}$

Por (1), (2) e (3) e o Teorema das 3 perpendiculares, segue  $\overline{D_1H_1} \perp \overline{H_1G_1}$  e que  $D_1H_1G_1B_1$  é um retângulo.



$$(D_1H_1)^2 = l^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot l\right)^2$$

$$\therefore D_1H_1 = \frac{l}{3}\sqrt{17}$$

$$\Delta AB_1D_1 : D_1B_1 = \frac{l\sqrt{2}}{3}$$

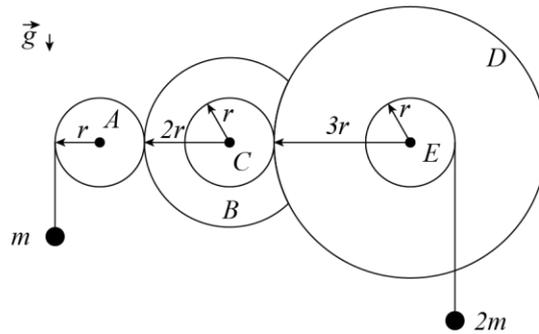
$$(B_1D_1H_1) = \frac{1}{2}(B_1D_1) \cdot (D_1H_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{l\sqrt{2}}{3}\right) \cdot \left(\frac{l\sqrt{17}}{3}\right)$$

$$\therefore (B_1D_1H_1) = \frac{l^2\sqrt{34}}{18}$$

**Alternativa E.**

# FÍSICA

## Questão 16



Cinco discos A, B, C, D e E, de centros fixos, giram solidariamente conforme a geometria da figura. Duas partículas de massas  $m$  e  $2m$  enrolam ou desenrolam fios inextensíveis às mesmas velocidades escalares das bordas de seus respectivos discos.

### Dados:

- aceleração da gravidade:  $g$ ;

### Observações:

- os cinco discos estão inicialmente em repouso;
- os cinco centros dos discos estão na mesma horizontal;
- o disco A está engrenado ao disco B;
- ao girar, o disco B faz o disco C girar à mesma velocidade angular, pois B e C são concêntricos;
- o disco C está engrenado ao disco D;
- ao girar, o disco D faz o disco E girar à mesma velocidade angular, pois D e E são concêntricos;
- a partícula de menor massa está associada ao disco A e a de maior massa ao disco E;
- despreze as massas dos discos e desconsidere quaisquer deslizamentos.

Pelo princípio da conservação da energia, a aceleração (módulo e sentido) da partícula de maior massa, após o início de seu movimento, é:

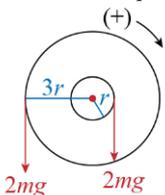
- $2/19 g$ , de baixo para cima (enrolando o fio)
- $2/19 g$ , de cima para baixo (desenrolando o fio)
- $4/19 g$ , de baixo para cima (enrolando o fio)
- $4/11 g$ , de cima para baixo (desenrolando o fio)
- $4/11 g$ , de baixo para cima (enrolando o fio)

### Resolução:

Relacionemos os vínculos das rotações.

$$\left. \begin{array}{l} \omega_A \cdot r = \omega_B \cdot 2r \\ \omega_B = \omega_C \\ \omega_C \cdot r = \omega_D \cdot 3r \\ \omega_D = \omega_E \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \omega_A = 2\omega_B = 2\omega_C \\ \omega_C = 3\omega_D = 3\omega_E \\ \omega_A = 6\omega_E \text{ e } v_A = 6v_E \end{array}$$

Analisemos o torque em relação ao disco E.



$$T_R = 2mg \cdot r - 2mg(3r) = -4mgr$$

O que implica que o disco E gira no sentido anti-horário – de modo que a massa  $2m$  sobe.

Pela conservação de energia, temos:

$$\begin{aligned} E_{Mi} &= E_{Mf} \\ 0 &= \frac{m \cdot (6v)^2}{2} + \frac{2m v^2}{2} + mg(-6x) + mgx \\ 19mv^2 &= 4mgx \\ 19v^2 &= 4gx \end{aligned}$$

Derivando em relação ao tempo, temos:

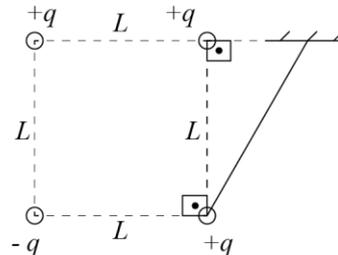
$$\frac{d}{dt}(19v^2) = \frac{d}{dt}(4gx)$$

$$19 \cdot 2v \cdot \left(\frac{dv}{dt}\right) = 4g \left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$38 \cdot v \cdot a = 4g \cdot v \quad \Rightarrow a = \frac{2}{19} \cdot g$$

**Alternativa A.**

**Questão 17**



Na figura, são mostradas três partículas fixadas e uma quarta partícula pendurada por um fio inextensível. As quatro partículas estão carregadas eletricamente e em equilíbrio nos vértices de um quadrado de lado  $L$ .

**Dado:**

- constante elétrica do meio:  $k$ .

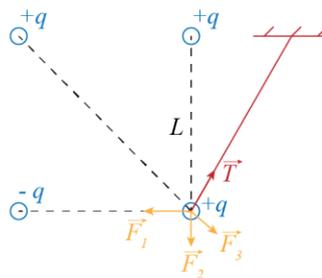
**Observação:**

- as cargas de cada partícula estão indicadas na figura.

A tração no fio é:

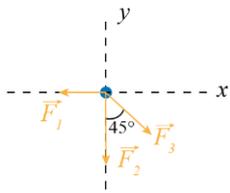
- $2 \frac{kq^2}{L^2}$
- $\frac{9}{4} \frac{kq^2}{L^2}$
- $\frac{3}{2} \frac{kq^2}{L^2}$
- $\frac{1}{4} \frac{kq^2}{L^2} (4 + \sqrt{2})$
- $\frac{1}{4} \frac{kq^2}{L^2} (2 + \sqrt{2})$

**Resolução:**



Pelo equilíbrio das forças:

$$|\vec{T}| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3| = |\vec{F}_{eR}|$$



Em x:

$$F_{e_{Rx}} = -\frac{kq^2}{L^2} + \frac{kq^2}{(L\sqrt{2})^2} \cdot \cos 45^\circ$$

$$F_{e_{Rx}} = -\frac{kq^2}{L^2} + \frac{\sqrt{2}kq^2}{4L^2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - 1\right) \frac{kq^2}{L^2}$$

Em y:

$$F_{e_{Ry}} = -\frac{kq^2}{L^2} + \frac{kq^2}{(L\sqrt{2})^2} \cdot \cos 45^\circ$$

$$F_{e_{Ry}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + 1\right) \frac{kq^2}{L^2}$$

A força elétrica resultante na partícula é:

$$F_{e_R}^2 = T^2 = F_{e_{Rx}}^2 + F_{e_{Ry}}^2$$

$$T^2 = \left[ \left( \frac{\sqrt{2}}{4} - 1 \right) \frac{kq^2}{L^2} \right]^2 + \left[ \left( \frac{\sqrt{2}}{4} + 1 \right) \frac{kq^2}{L^2} \right]^2$$

$$T^2 = \left[ \left( \frac{2}{16} - \frac{2\sqrt{2}}{4} + 1 \right) + \left( \frac{2}{16} + \frac{2\sqrt{2}}{4} + 1 \right) \right] \frac{k^2q^4}{L^4}$$

$$T^2 = \left( \frac{1}{2} + 2 \right) \frac{k^2q^4}{L^4} \Rightarrow T^2 = \frac{9}{4} \frac{k^2q^4}{L^4} \Rightarrow T = \frac{3}{2} \frac{kq^2}{L^2}$$

Alternativa C.

▶ **Questão 18**

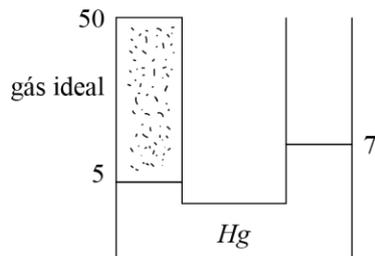


Figura 1

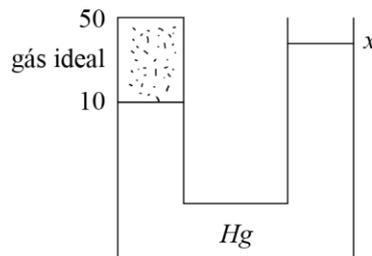
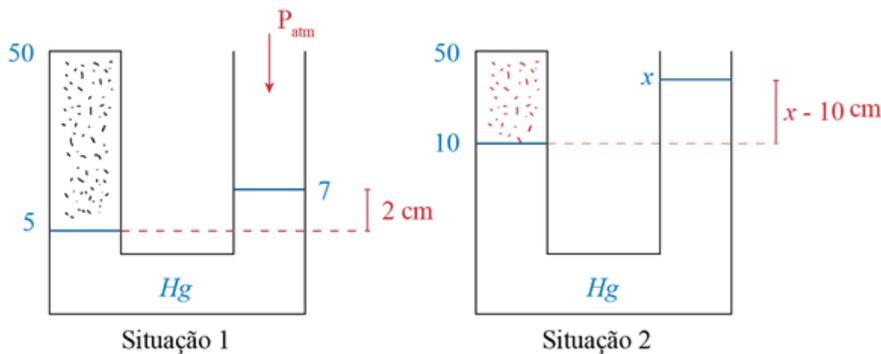


Figura 2

Na Figura 1, é apresentado um manômetro de Hg, graduado em cm, que aprisiona uma certa massa de gás ideal em equilíbrio. Adiciona-se uma nova quantidade de Hg pela extremidade aberta do manômetro e, após o novo equilíbrio, obtém-se a configuração da Figura 2. Sabendo que a temperatura ambiente se manteve constante, desprezando-se qualquer vazamento de gás e sendo 70 cm Hg a pressão atmosférica, o valor da graduação  $x$ , em cm, é:

- a) 30
- b) 15
- c) 42
- d) 21
- e) 10

**Resolução:**



Pelo teorema dos pontos isobáricos, a pressão do gás ( $P_{1\text{ gás}}$ ), na situação 1, será:

$$(P_{1\text{ gás}}) = P_{\text{hid}} + P_{\text{atm}} = 2 + 70 = 72 \text{ cmHg}$$

A pressão do gás ( $P_{2\text{ gás}}$ ), na situação 2, considerando a mudança de estado do gás a temperatura constante, será:

$$P_{1\text{ gás}} \cdot V_1 = P_{2\text{ gás}} \cdot V_2$$

$$72 \cdot (A \cdot 45) = P_{2\text{ gás}} (A \cdot 40)$$

$$P_{2\text{ gás}} = 81 \text{ cmHg}$$

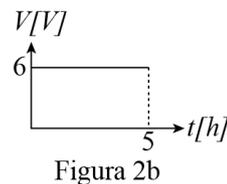
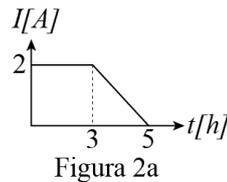
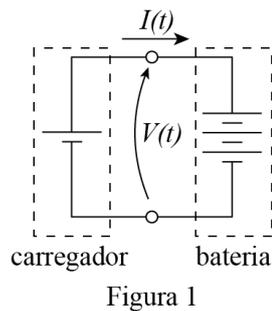
Aplicando o teorema dos pontos isobáricos no segundo equilíbrio, temos:

$$P_{2\text{ gás}} = P_{\text{hid}} = P_{\text{atm}}$$

$$81 = (x - 10) + 70 \Rightarrow x = 21 \text{ cm}$$

**Alternativa D.**

**▶ Questão 19**

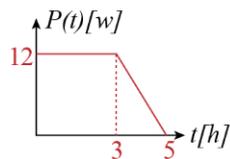


Considere um sistema de carga de bateria hipotético, mostrada na Figura 1, no qual, os gráficos da corrente ( $I$ ) e da tensão  $V(t)$  são mostradas nas Figuras 2a e 2b. Ao longo do período de carga, que é de 5 h, a energia fornecida pelo carregador, em  $kJ$ , é:

- a) 345,6
- b) 172,8
- c) 129,6
- d) 86,4
- e) 36,0

**Resolução:**

Sabendo que  $P(t) = U(t) \cdot i(t)$ , podemos esboçar o gráfico da potência instantânea.

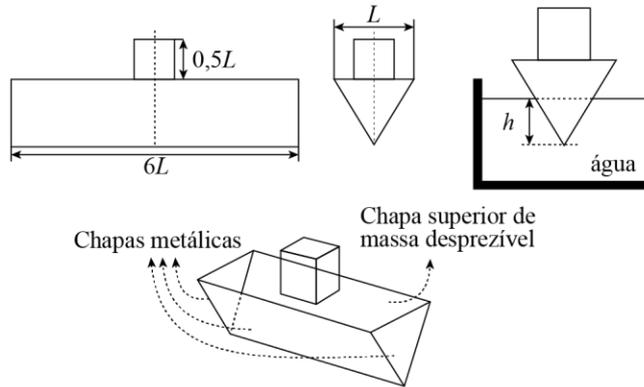


$$\text{Energia} = E \cong \text{Área} \Rightarrow E = (3 \cdot 12) + \frac{2 \cdot 12}{2} \Rightarrow E = 48 \text{ Wh}$$

Transformando para  $kJ \left( \times \frac{3600}{1000} \right)$

$$E = 48 \cdot (3,6) = 172,8 \text{ kJ}$$

**Alternativa B.**



Para simular o protótipo de um navio, um engenheiro constrói um prisma reto, com seção reta no formato de um triângulo equilátero, a partir de quatro chapas metálicas (duas triangulares de lado  $L$ , duas retangulares  $6L \times L$ ) e uma chapa retangular superior de massa desprezível e dimensões  $6L \times L$ . A estrutura encontra-se bem vedada e contém ar em seu interior. Uma carga cúbica de aresta  $0,5L$  é fixada simetricamente sobre o prisma e em conformidade com as figuras. Em seguida, a estrutura (prisma + carga) é colocada numa piscina, afundando  $h$ .

Dados:

- massa específica superficial das chapas metálicas:  $8 \text{ kg/m}^2$ ;
- massa específica volumétrica da carga cúbica:  $240 \text{ kg/m}^3$ ;
- massa específica da água:  $1000 \text{ kg/m}^3$ ;
- $L = 20 \text{ cm}$ ;
- $\sqrt{3} \approx 1,7$ ;
- $\frac{6}{5\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0,68$ .

Supondo que a estrutura flutue de forma equilibrada, o valor de  $h$ , em centímetros, pode ser arredondado para:

- 8
- 10
- 12
- 14
- 16

**Resolução:**

$$\text{Área do triângulo} = \frac{1}{2} \cdot (0,2)^2 \cdot \text{sen } 60^\circ = \sqrt{3} \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$\text{Área do retângulo} = 6L^2 = 0,24 \text{ m}^2$$

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= (0,48 + 0,034)8 = 4,1 \text{ kg} \\ m_2 &= \left(\frac{L}{2}\right)^3 \cdot 240 = 0,24 \text{ kg} \end{aligned} \right\} m_{\text{total}} = 4,34 \text{ kg}$$

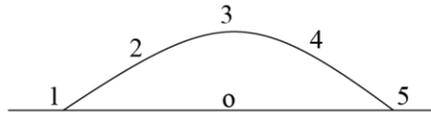
$$V_{\text{Prisma}} = \sqrt{3} \cdot 6 \cdot 0,2 \cdot 10^{-2} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$$

$$\rho_c = \frac{4,34}{2 \cdot 10^{-2}} = 2,17 \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3$$

$$\frac{\rho_c}{\rho_L} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{2,17 \cdot 10^2}{10^3}} = \frac{h}{17} \Rightarrow h \approx 8 \text{ cm}$$

**Alternativa A.**

▶ **Questão 21**



Uma fonte sonora é lançada do ponto 1 indicado na figura e segue uma trajetória balística parabólica emitindo um tom de frequência constante  $f_f$ . Sejam  $f_1$  a  $f_5$  as frequências percebidas pelo observador "o" quando a fonte passa pelos pontos de 1 a 5, respectivamente, indicados na figura.

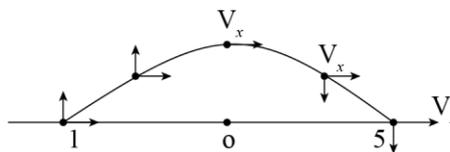
**Observações:**

- os pontos 1 e 5 estão no mesmo plano horizontal;
- os pontos 2 e 4 estão na mesma altitude;
- o ponto 3 é o de maior altitude na trajetória;
- o ponto 1 é aquele imediatamente depois do lançamento;
- o ponto 5 é aquele imediatamente antes do choque com o plano horizontal;
- o observador "o" está na mesma vertical do ponto 3;
- a fonte emite em todas as direções;
- considere a velocidade da fonte muito menor que a do som.

Desta forma, podemos afirmar que:

- $f_1 \geq f_2 \geq f_3 = f_f \geq f_4 \geq f_5$
- $f_1 \geq f_5 \geq f_2 = f_4 \geq f_3 \geq f_f$
- $f_1 \geq f_5 \geq f_2 = f_4 \geq f_3 \geq f_f$
- $f_1 \geq f_2 \geq f_3 = f_4 \geq f_5 \geq f_f$
- $f_1 \geq f_5 \geq f_3 = f_f \geq f_2 \geq f_4$

**Resolução:**



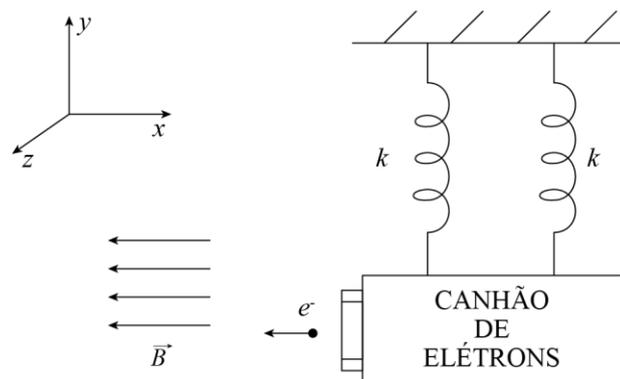
Em 3, a fonte se desloca perpendicularmente ao observador. Portanto, não há efeito Doppler  $\Rightarrow f_3 = f_f$

Em 5, a fonte se afasta do observador numa velocidade vertical maior do que em 4  $\Rightarrow f_5 \leq f_4 \leq f_3 = f_{fonte}$ .

Como em 1 e 2 a fonte se aproxima do observador, a frequência aumenta.

**Alternativa A.**

▶ **Questão 22**



Na figura, é apresentado um canhão oscilando preso ao teto por duas molas e disparando continuamente elétrons numa região sujeita a um campo magnético constante.

**Dados:**

- constante elástica de cada mola:  $k$ ;
- amplitude de oscilação do canhão/par de molas:  $A$ ;
- direção de oscilação do canhão/par de molas:  $y$ ;
- vetor campo magnético:  $(-B, 0, 0)$ ;
- velocidade relativa de disparo dos elétrons em relação ao canhão:  $(-v, 0, 0)$ ;

- massa de elétron:  $m$ ;
- massa do canhão:  $M$ ;
- carga do elétron:  $-e$ .

**Observações:**

- o canhão oscila no plano  $xy$ ;
- a velocidade inicial de um elétron disparado é obtida ao se somarem vetorialmente os efeitos da oscilação e do canhão parado;
- despreze o efeito gravitacional no movimento dos elétrons;
- $m \ll M$ ;
- despreze as interações elétricas entre os elétrons.

Nas condições acima, a maior coordenada  $z$  que algum elétron pode alcançar é:

- a)  $\frac{mA\sqrt{2k\frac{A^2}{M} + v^2}}{eB}$
- b)  $\frac{m\sqrt{k\frac{A^2}{M} + v^2}}{eB}$
- c)  $\frac{mA\sqrt{2\frac{k}{M}}}{eB}$
- d)  $\frac{mA\sqrt{\frac{k}{M}}}{eB}$
- e)  $\frac{2mA\sqrt{2\frac{k}{M}}}{eB}$

**Resolução:**

MHS do canhão  $\Rightarrow V_y = \omega_A \text{ sen}\omega t$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K_{eq}}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2K}{M}}$

$V_x$  é paralelo a B  $\Rightarrow$  Movimento helicoidal.

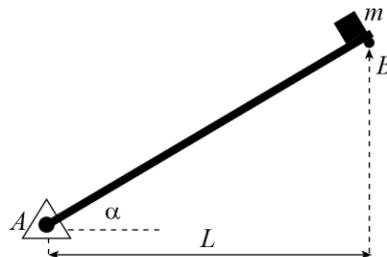
onde  $\frac{mV_y}{R} = qV_x B \Rightarrow R = \frac{mV_y}{qB}$

A maior distância ocorre quando o canhão está diametralmente oposto e  $\text{sen}(\omega t) = 1$ . Logo:

$\Rightarrow d = \frac{2m}{qB} \cdot \sqrt{\frac{2K}{M}} \cdot A$

**Alternativa E.**

**Questão 23**



A figura mostra uma rampa inclinada, de massa desprezível, apoiada por dois suportes fixados nos pontos  $A$  e  $B$ . O apoio em  $A$  admite forças horizontais e verticais e o apoio em  $B$  apenas forças verticais. Um objeto de dimensões desprezíveis é liberado do ponto  $B$  a partir do repouso e se desloca sem atrito em direção a  $A$ .

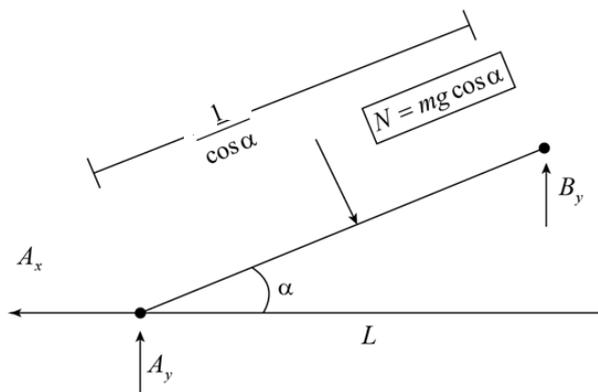
**Dados:**

- aceleração da gravidade:  $g$ ;
- massa do objeto:  $m$ ;
- ângulo da rampa com a horizontal:  $\alpha$ ;
- comprimento horizontal da rampa:  $L$ .

O módulo da reação de apoio em A quando o objeto estiver passando pelo meio da rampa é igual a:

- a)  $\frac{1}{2} mg (\cos \alpha + \sin \alpha)$
- b)  $\frac{1}{2} mg$
- c)  $\frac{1}{2} mg \cos \alpha \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha}$
- d)  $\frac{1}{2} mg \cos \alpha \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha}$
- e)  $\frac{1}{2} mg \cos \alpha$

**Resolução:**



$$\tau_A = 0 \Rightarrow \frac{N \cdot \mathcal{L}}{2 \cos \alpha} = B_y \cdot \mathcal{L} \Rightarrow$$

$$B_y = \frac{N}{2 \cos \alpha} = \frac{mg}{2}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y = N \cos \alpha \Rightarrow$$

$$A_y = N \left( \cos \alpha - \frac{1}{2 \cos \alpha} \right) = N \left( \frac{2 \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha} \right)$$

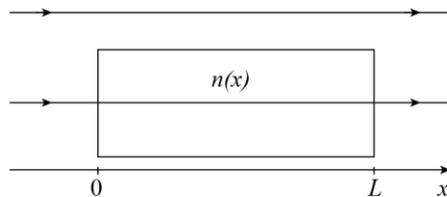
$$A_y = N \left( \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha} \right) = \frac{mg}{2} \cos 2\alpha$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = N \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_x = mg \sin \alpha \cos \alpha = \frac{mg}{2} \sin 2\alpha$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \frac{mg}{2} \sqrt{\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha} = \frac{mg}{2}$$

**Alternativa B.**



Dois feixes de luz em fase se propagam no vácuo para a direita paralelamente ao eixo  $x$  desenhado na figura. Um dos feixes atravessa um bloco com a forma de um paralelepípedo, em cujo meio o índice de refração é variável, provocando uma diminuição de velocidade e conseqüente atraso no tempo de viagem.

**Dados:**

- comprimento de onda do feixe de luz no vácuo:  $\lambda$ ;
- comprimento do paralelepípedo:  $L$ ;
- índice de refração no interior do paralelepípedo:  $n(x) = 2L/L + x$ ;  $0 \leq x \leq L$

O menor valor de  $L$ , para que a interferência entre os feixes, em um anteparo à direita do bloco, seja destrutiva, é:

- a)  $\frac{\lambda}{2(2+3\sqrt{2})}$
- b)  $\frac{\lambda}{3(2\sqrt{2}-2)}$
- c)  $\frac{\lambda}{3(2-\sqrt{2})}$
- d)  $\frac{\lambda}{2(3+2\sqrt{2})}$
- e)  $\frac{\lambda}{2(3-2\sqrt{2})}$

**Resolução:**

Para o caso de uma interferência destrutiva com valor de  $L$  mínimo, temos um atraso de  $\lambda/2$  no feixe que se desloca no meio com índice de refração variável. O tempo de viagem do feixe através do bloco é:

$$v(x) = \frac{c}{n(x)} \text{ com } n(x) = \sqrt{\frac{2L}{L+x}}$$

$$dt = \frac{dx}{v(x)} = \frac{n(x)dx}{c} \Rightarrow dt = \frac{\sqrt{2L}}{c} \frac{dx}{L+x}$$

$$t = \int_0^L dt = \int_0^L \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2L}{L+x}} dx$$

Seja  $L+x = u \Rightarrow dx = du$

$$t = \frac{\sqrt{2L}}{c} \int_L^{2L} \frac{1}{\sqrt{u}} du = \frac{\sqrt{2L}}{c} \left( \frac{\sqrt{u}}{1/2} \right) \Big|_L^{2L}$$

$$t = \frac{\sqrt{2L}}{c(1/2)} (\sqrt{2L} - \sqrt{L}) = \frac{2 \cdot \sqrt{2L} \cdot \sqrt{2L} - 2\sqrt{2L} \cdot \sqrt{L}}{c}$$

$$t = \frac{4L - 2L\sqrt{2}}{c}$$

Diferença de tempos:

$$\Delta t = t_{\text{bloco}} - t_{\text{vácuo}} = \left( \frac{4L - 2L\sqrt{2}}{c} \right) - \frac{L}{c} = \frac{\lambda}{2c}$$

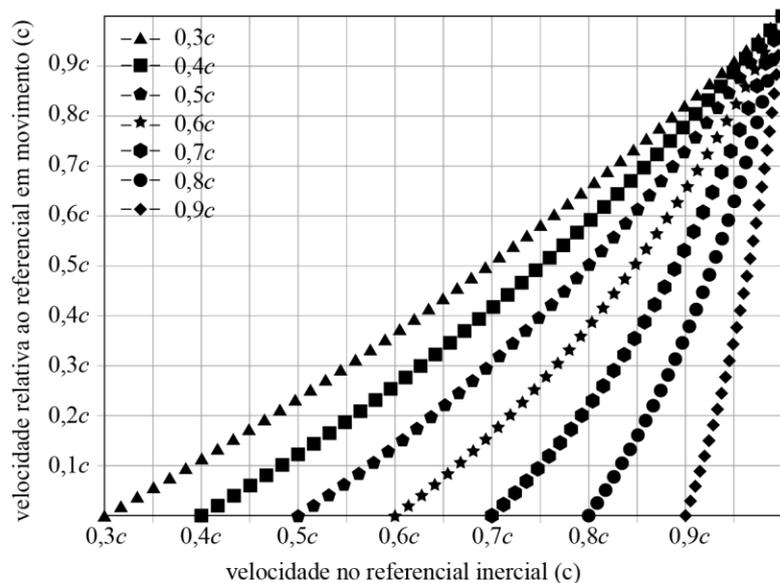
$$4L - 2L\sqrt{2} - L = \frac{\lambda}{2}$$

$$3L - 2L\sqrt{2} = \frac{\lambda}{2}$$

$$L = \frac{\lambda}{2(3-2\sqrt{2})}$$

**Alternativa E.**

▶ **Questão 25**



Na figura, é mostrada a transformação de Lorentz para diversas velocidades ( $0,3c$  a  $0,9c$ ) de um referencial em movimento em relação a um referencial inercial. Essa transformação é usada para calcular a velocidade relativa (eixo vertical) de um outro objeto se movimentando no mesmo sentido do referencial que está em alta velocidade ( $0,3c$  a  $0,9c$ ). Repare que o eixo horizontal exibe uma escala de velocidade em relação ao referencial inercial e o eixo vertical informa a velocidade relativa entre objeto e referencial em movimento.

Uma nave  $X$  viaja a  $0,5c$  e atira um foguete  $Y$ , no mesmo sentido de seu movimento, a uma velocidade relativa a  $X$  de  $0,3c$ . Por sua vez, o foguete  $Y$  atira um projétil  $Z$ , também no mesmo sentido dos movimentos, a uma velocidade relativa a  $Y$  de  $0,1c$ .

**Dado:**

- velocidade da luz:  $c$ .

Em relação ao referencial inercial, a velocidade de  $Z$  é aproximadamente:

- $0,90c$
- $0,65c$
- $0,70c$
- $0,75c$
- $0,80c$

**Resolução:**

A 3ª linha “topo para baixo” é a curva referente a  $0,5c$ , na qual a ordenada  $0,3c$  se refere à velocidade  $y = 0,7c$  (abscissa).  
A 5ª linha “topo para baixo” é a curva referente a  $0,7c$ , na qual a ordenada  $0,1c$  se refere à velocidade  $z = 0,75c$ .

**Alternativa D.**

▶ **Questão 26**

Para simular a órbita  $(x(t), y(t))$  do satélite de um planeta, no referencial do planeta, utilizou-se um modelo unidimensional com as seguintes equações:

$$x(t) = A \cos(\omega t) \qquad y(t) = B \sin(\omega t)$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $\omega$  são constantes e  $t$  é o instante de tempo.

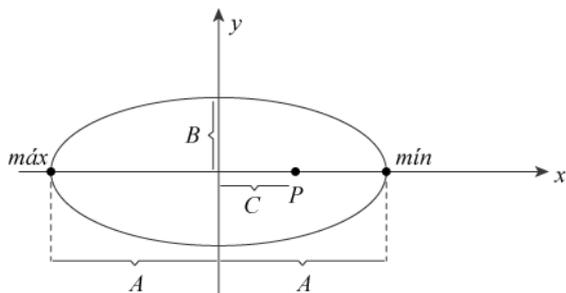
**Dados:**

- massa do planeta:  $M$ ;
- massa do satélite:  $m$ , onde  $m \ll M$ ;
- constante universal de gravitação:  $G$ ;
- $C = \sqrt{A^2 - B^2}$ ;
- localização do centro do planeta:  $(C, 0)$ .

A diferença entre a maior e a menor energia potencial gravitacional do satélite é:

- $2AGmM/B^2$
- $CGmM/B^2$
- $2CGmM/A^2$
- $2CGmM/B^2$
- $AGmM/C^2$

**Resolução:**



De acordo com os dados do enunciado, o satélite descreve uma elipse centrada na origem, com semieixo maior  $A$  e semieixo menor  $B$ , com o planeta situado no foco da direita.

A energia potencial gravitacional ( $E_{PG}$ ) é dada por  $E_{PG} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}$ , em que  $r$  é a distância entre o satélite e o planeta.

Como ela é negativa, a energia máxima corresponde ao  $r$  máximo, que é  $A+C$ , e a energia mínima corresponde ao  $r$  mínimo, que é  $A-C$ .

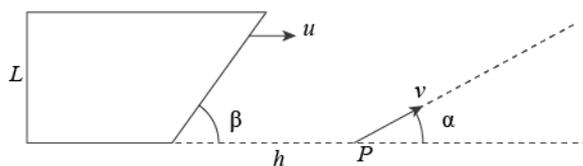
$$\text{Logo, } \Delta = E_{PG\text{máx}} - E_{PG\text{mín}} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{A+C} + \frac{G \cdot M \cdot m}{A-C}$$

$$\Delta = -G \cdot M \cdot m \cdot \left( \frac{1}{A+C} - \frac{1}{A-C} \right) = -G \cdot M \cdot m \cdot \left( \frac{A-C - A-C}{A^2 - C^2} \right)$$

$$\Delta = -G \cdot M \cdot m \cdot \left( \frac{-2C}{B^2} \right) = \frac{2 \cdot C \cdot G \cdot m \cdot M}{B^2}$$

**Alternativa D.**

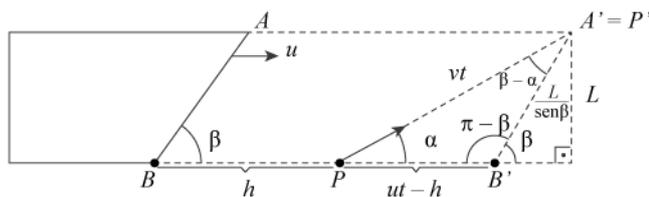
**Questão 27**



Um trapézio retângulo desloca-se para a direita à velocidade escalar constante  $u$ . No instante inicial, um de seus vértices está à distância  $h$  do ponto  $P$ . Ainda nesse instante, um objeto parte do ponto  $P$  à velocidade constante  $v$ , indicada na figura juntamente com outras grandezas. O valor mínimo de  $v$  para que o objeto não seja atingido pelo trapézio, onde  $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ , é:

- a)  $\frac{u}{\text{sen}(\beta - \alpha) / \text{sen}\beta + h \text{sen}\alpha / L}$
- b)  $\frac{u \cos\beta}{\cos(\alpha + \beta) + h \text{sen}\alpha / L}$
- c)  $\frac{u \text{sen}\beta}{\text{sen}\beta + h \text{sen}\alpha / L}$
- d)  $\frac{u \text{sen}\beta}{\text{sen}(\beta + \alpha) + h \text{sen}\alpha / L}$
- e)  $\frac{u}{\cos\alpha + h \text{sen}\alpha \cos\beta / L}$

**Resolução:**



O caso limite ocorre quando  $P'$  coincide com  $A'$ .

Vamos usar a lei dos senos no  $\Delta A'B'P$  para obter  $t$  em função dos dados:

$$\frac{A'P}{\text{sen}(\pi - \beta)} = \frac{A'B'}{\text{sen}\alpha}$$

$$\frac{v \cdot t}{\text{sen}(\pi - \beta)} = \frac{L}{\text{sen}\alpha}$$

$$\frac{v \cdot t}{\text{sen}\beta} = \frac{L}{\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta}$$

$$t = \frac{L}{v \cdot \text{sen}\alpha}$$

Vamos novamente utilizar a lei dos senos no  $\Delta A'B'P$  e eliminar  $t$ :

$$\frac{B'P}{\text{sen}(\beta - \alpha)} = \frac{A'B'}{\text{sen}\alpha}$$

$$\frac{u \cdot t - h}{\text{sen}(\beta - \alpha)} = \frac{L}{\text{sen}\alpha}$$

$$u \cdot t - h = \frac{L \cdot \text{sen}(\beta - \alpha)}{\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta}$$

Substituindo  $t$ :

$$\frac{u \cdot L}{v \cdot \text{sen}\alpha} - h = \frac{L \cdot \text{sen}(\beta - \alpha)}{\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta}$$

$$\frac{u \cdot L}{v \cdot \text{sen}\alpha} = \frac{L \cdot \text{sen}(\beta - \alpha) + h \cdot \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta}{\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta}$$

$$\frac{u \cdot L}{v} = \frac{L \cdot \text{sen}(\beta - \alpha) + h \cdot \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta}{\text{sen}\beta}$$

$$v = \frac{u \cdot L \cdot \text{sen}\beta}{L \cdot \text{sen}(\beta - \alpha) + h \cdot \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta}$$

Dividindo em cima e embaixo por  $L \cdot \text{sen}\beta$ :

$$v = \frac{u}{\text{sen}(\beta - \alpha) / \text{sen}\beta + h \cdot \text{sen}\alpha / L}$$

#### Alternativa A.

### ▶ Questão 28

Uma lente convergente é construída usando um material de índice de refração  $n$ , podendo a sua distância focal  $f$  ser calculada usando a equação dos fabricantes de lentes. Um objeto é posicionado no eixo da lente e muito distante da mesma.

#### Observações:

- $f$  é proporcional a  $(n-1)^{-1}$ ;
- $n > 1$ ;
- seja  $x$  tal que  $|x| \ll 1$ , então  $(1-x)^{-1} \approx 1+x$ .

Caso haja uma ínfima variação na constituição do índice de refração do material ( $n \rightarrow n + \Delta n$ ), a variação  $\Delta i$  na posição final da imagem do objeto ( $i \rightarrow i + \Delta i$ ) é, aproximadamente:

- $f \Delta n / n$
- $f \Delta n / (n-1)$
- $-f \Delta n / (n-1)$
- $-f \Delta n / (n^2 - 1)$
- $f \Delta n / (n^2 - 1)$

## Resolução:

Equação dos fabricantes de lentes para  $n_{LENTE} = n$  e  $n_{MEIO} = 1$ :

$$\frac{1}{f} = (n-1) \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = (n-1) \cdot k$$

Se  $f$  é a distância focal antes e  $f'$  é a distância focal depois, então:

$$f = \frac{1}{(n-1) \cdot k}$$

$$f' = \frac{1}{(n + \Delta n - 1) \cdot k} = \frac{(n-1) \cdot f}{n + \Delta n - 1}$$

Se o objeto está muito distante, pela equação de Gauss, as posições das imagens em relação à lente são  $i = f$  (antes) e  $i + \Delta i = f'$  (depois).

$$\text{Daí, } \Delta i = f' - f = \frac{(n-1) \cdot f}{n + \Delta n - 1} - f = \frac{(n-1-n-\Delta n+1) \cdot f}{n + \Delta n - 1}$$

$$\text{Como } \Delta n \ll n \text{ (variação ínfima), então: } \Delta i = \frac{-\Delta n \cdot f}{n + \Delta n - 1} \approx \frac{-\Delta n \cdot f}{n - 1}.$$

## Alternativa C.

### Questão 29

Em uma prática de laboratório, a superfície externa de uma parede é integralmente recoberta com um material isolante térmico. Por sua vez, a superfície interna encontra-se exposta a uma chama.

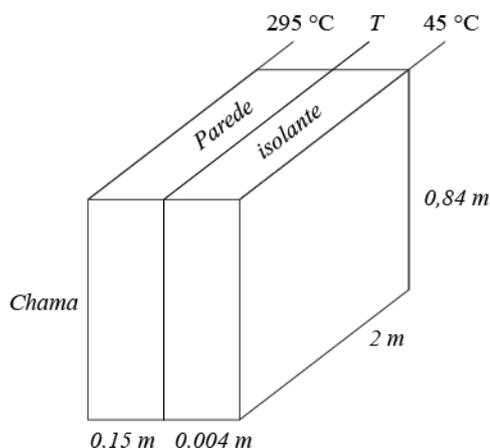
#### Dados:

- condutividade térmica da parede:  $3 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ ;
- condutividade térmica do material isolante:  $0,02 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ ;
- espessura da parede:  $15 \text{ cm}$ ;
- espessura do material isolante:  $4 \text{ mm}$ ;
- temperatura na superfície livre do isolante:  $45 \text{ }^\circ\text{C}$ ;
- temperatura na superfície da parede em contato com a chama:  $295 \text{ }^\circ\text{C}$ ;
- calor latente de fusão do gelo:  $336 \text{ J/g}$ ;
- dimensões da parede e da camada isolante:  $2 \text{ m} \times 0,84 \text{ m}$ .

A massa de gelo máxima, em kg, que a energia incidente na parede é capaz de fundir em uma hora de experimento é:

- a) 1,5
- b) 1,8
- c) 15
- d) 18
- e) 20

## Resolução:



$$Q = m_{\text{gelo}} \cdot L_{\text{gelo}}$$

$$m_{\text{gelo}} = \frac{Q}{L_{\text{gelo}}} = \frac{\phi \cdot t}{L_{\text{gelo}}} = \frac{\phi \cdot 3600}{336000} = \frac{3 \cdot \phi}{280}$$

$$\phi_{\text{parede}} = \phi_{\text{isolante}}$$

Lei de Fourier da condução:

$$\frac{k_{\text{parede}} \cdot A \cdot (295 - T)}{e_{\text{parede}}} = \frac{k_{\text{isolante}} \cdot A \cdot (T - 45)}{e_{\text{isolante}}}$$

$$\frac{3 \cdot (295 - T)}{0,15} = \frac{0,020 \cdot (T - 45)}{0,004}$$

$$20 \cdot (295 - T) = 5 \cdot (T - 45)$$

$$4 \cdot (295 - T) = T - 45$$

$$1180 - 4 \cdot T = T - 45$$

$$5 \cdot T = 1225$$

$$T = 245$$

$$\phi = \frac{k_{\text{parede}} \cdot A \cdot (295 - T)}{e_{\text{parede}}} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 0,84 \cdot (295 - 245)}{0,15}$$

$$m_{\text{gelo}} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0,84 \cdot 50}{280 \cdot 0,15} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 84}{1,5 \cdot 28} = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 18 \text{ kg.}$$

Alternativa D.

### ▶ Questão 30

Em uma determinada região esférica do espaço, a distribuição volumétrica de cargas é tal que o campo elétrico em seu interior é o vetor  $E(r)\hat{u}_r$ , onde  $\hat{u}_r$  é o vetor unitário na direção radial e  $E(r)$ , em V/m, é igual a:

$$E(r) = \begin{cases} A \cos\left(\frac{3r\pi}{2R}\right) + \frac{(2-r)^2}{R} - 1, & 0 \leq r \leq R; \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

em que  $A$  é uma constante,  $r$  é a distância até o centro da esfera e  $R$  é o raio da esfera, em metros.

**Observação:**

- $R < 3 \text{ m.}$

Com as condições impostas acima, a constante  $A$ , em V/m, necessariamente é:

- 2
- 2
- 3
- 3
- 0

**Resolução:**

Como não há cargas elétricas em  $r = R$ , podemos considerar que  $E(r)$  é contínuo em  $r = R$ , isto é,  $E(R) = 0$ , já que  $E(r) = 0$  para  $r > R$ :

$$E(R) = A \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot R \cdot \pi}{2 \cdot R}\right) + \frac{(2-R)^2}{R} - 1 = 0$$

$$A \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{2}\right) + \frac{4 - 4 \cdot R + R^2}{R} - \frac{R}{R} = 0$$

Mas,  $\cos(3 \cdot \pi/2) = 0$ :

$$\frac{4 - 4 \cdot R + R^2 - R}{R} = 0$$

$$R^2 - 5 \cdot R + 4 = 0$$

As soluções são dois números com soma 5 e produto 4, ou seja,  $R = 1 \text{ m}$  ou  $R = 4 \text{ m}$ .

Como o enunciado afirma que  $R < 3 \text{ m}$ , então,  $R = 1 \text{ m}$ .

Outra consideração que podemos fazer é que, pela Lei de Gauss, o campo elétrico e seu fluxo são nulos para  $r = 0$ , visto que não há cargas internas em  $r = 0$ . Daí,  $E(0) = 0$ .

$$E(0) = A \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot 0 \cdot \pi}{2 \cdot R}\right) + \frac{(2-0)^2}{R} - 1 = 0$$

Mas,  $\cos(0) = 1$  e  $R = 1$ :

$$A + \frac{4}{1} - 1 = 0$$

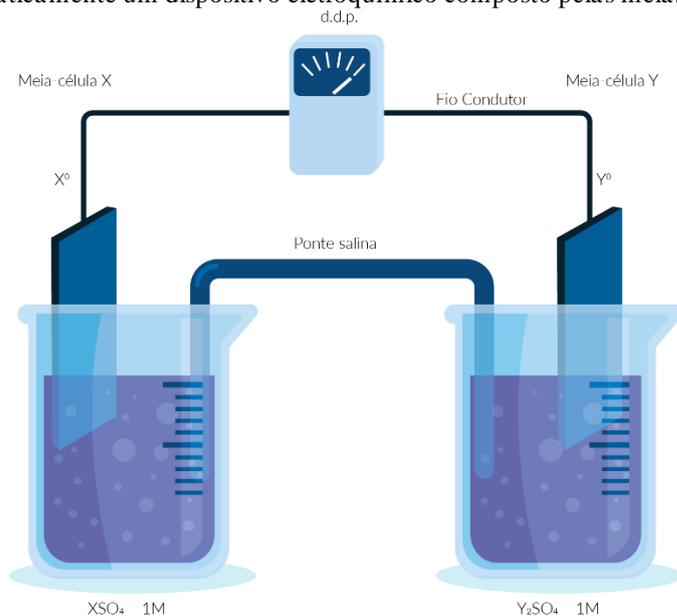
$$A = -3.$$

Alternativa C.

# QUÍMICA

## Questão 31

A figura a seguir mostra esquematicamente um dispositivo eletroquímico composto pelas meias-células X e Y.

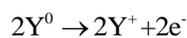


Dados: Potenciais-padrão de redução das espécies químicas envolvidas.

|                        |                        |
|------------------------|------------------------|
| $E^{\circ}_x = -1,85V$ | $E^{\circ}_y = -2,93V$ |
|------------------------|------------------------|

Com base no esquema eletroquímico apresentado na figura e nos dados fornecidos, analise as proposições a seguir na condição do circuito fechado.

- I. A semirreação representada pela equação estequiométrica  $X^0 \rightarrow X^{+2} + 2e^-$  é espontânea por ser de oxidação.
- II. O fluxo de elétrons ocorre no sentido horário, indo do ânodo para cátodo.
- III. A corrente iônica circula pelos eletrodos e fios metálicos.
- IV. O eletrodo da meia-célula X é o cátodo onde ocorre reação de redução.
- V. As reações eletroquímicas podem ser representadas pelas seguintes equações estequiométricas:



A opção que apresenta APENAS afirmativas verdadeiras é:

- a) I e III.
- b) II, III e IV.
- c) I e V.
- d) IV e V.
- e) II e V.

### Resolução:

Maior  $E^{\circ}_{red} \rightarrow$  Cátodo  $\rightarrow$  Polo(+)  $\rightarrow E^{\circ}_{red}(x) = -1,85V$

Maior  $E^{\circ}_{red} \rightarrow$  Ânodo  $\rightarrow$  Polo(-)  $\rightarrow E^{\circ}_{red}(y) = -2,93V$

Representação IUPAC:  $Y^0 / Y^{+2} // X^{2+} / X^0$

Fluxo dos eletros será do eletrodo Y para o eletrodo de X (sentido anti-horário).



I- Falso. (Na célula apresentada).

II- Falso. (Sentido anti-horário) no esquema apresentado será do eletrodo Y para o eletrodo X.

III- Falso. A corrente iônica percorre pelo circuito interno.

IV- Verdadeiro.

V- Verdadeiro.

**Alternativa D.**

**▶ Questão 32**

Uma mistura de um monoácido orgânico e um monoálcool primário, em uma proporção molar 1:2, foi tratada com uma quantidade catalítica de ácido sulfúrico concentrado sob condições de volume e temperatura constantes. Após um período de reação suficientemente longo, em um sistema fechado, foi observado que a reação apresentou uma conversão de 87,5% do monoácido.

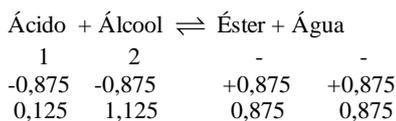
Se o mesmo tratamento for aplicado a uma mistura equimolar desses mesmos compostos, a conversão esperada do monoácido e o grupo funcional do produto principal serão:

- a) 67,2%; éster.
- b) 67,2%; éter.
- c) 70,0%; éster.
- d) 70,0%; éter.
- e) 87,5%; éster.

---

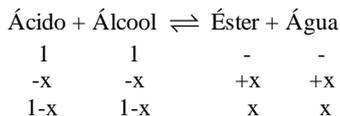
**Resolução:**

1º equilíbrio



$$K_{eq} = \frac{0,875 \times 0,875}{0,125 \times 1,125} \Rightarrow K_{eq} = 5,444$$

2º equilíbrio



$$K_{eq} = \frac{x \cdot x}{(1-x) \cdot (1-x)}$$

$$\sqrt{5,444} = \sqrt{\frac{x^2}{(1-x)^2}}$$

$$2,33 = \frac{x}{(1-x)}$$

$$2,33 - 2,33x = x$$

$$3,33x = 2,33$$

$$x = 0,6997$$

$$x = 69,97\% \Rightarrow x \cong 70\% (\text{Éster})$$

**Alternativa C.**

**Questão 33**

Para uma solução aquosa contendo sacarose em  $m$  kg de água, a diferença entre as temperaturas de ebulição de congelamento, à pressão de 1 atm, é de  $\Delta T$  em K. A massa molar da sacarose é  $Mg \cdot mol^{-1}$  e as constantes bulioscópica e crioscópica da água são, respectivamente,  $K_e$  e  $K_c$ , expressas em  $K \cdot kg \cdot mol^{-1}$ .

A expressão que indica o valor da massa de sacarose em gramas, na solução, é:

- $Mm(\Delta T - 100)/(K_e + K_c)$
- $2Mm \Delta T / (K_e + K_c)$
- $Mm \Delta T / (K_e + K_c)$
- $2Mm(\Delta T - 100)/(K_e + K_c)$
- $Mm(\Delta T - 50)/(K_e + K_c)$

**Resolução:**

$$\Delta T_e = T_{ef} - T_{ei} = K_e \cdot w \quad (1)$$

$$\Delta T_c = T_{ci} - T_{cf} = K_c \cdot w \quad (2)$$

(1)+(2):

$$T_{ef} - T_{cf} + T_{ci} - T_{ei} = K_e \cdot w + K_c \cdot w$$

Sabendo que  $T_{ef} - T_{cf} = \Delta T$  e que  $T_{ci} = 0^\circ C$  e  $T_{ei} = 100^\circ C$

$$\Delta T - 100 = W(K_e + K_c)$$

$$w = \frac{\Delta T - 100}{(K_e + K_c)}$$

Sabendo que  $w = \frac{M_1}{M \cdot M}$ , em que  $M_1$  é a massa da sacarose, tem-se:

$$M_1 = \frac{m \cdot M(\Delta T - 100)}{(K_e + K_c)}$$

**Alternativa A.**

**Questão 34**

Uma solução foi preparada com 1800 g de ácido sulfúrico puro e 2000 L de água deionizada, sendo, em seguida, eletrolisada. Uma amostra de 100 mL da solução resultante foi titulada com solução-padrão 0,1 M de hidróxido de sódio, tendo sido necessários 20,4 mL dessa solução para neutralizar a amostra. Considere que a massa específica do ácido sulfúrico vale  $1800 g \cdot L^{-1}$  e que misturas desse ácido em água se comportam idealmente no que se refere ao volume de mistura.

A alternativa que contém o volume aproximado de gás gerado na eletrólise, em  $m^3$ , medido nas CNTP, é:

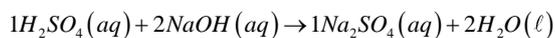
- 187,5
- 250
- 375
- 500
- Não é gerado gás algum e a solução apenas aquece pela passagem da corrente elétrica.

**Resolução:**

$$d_{H_2SO_4} = 1800 g \cdot L^{-1}$$

$$M_{H_2SO_4} = 1800 g \therefore V_{H_2SO_4} = 1 L$$

Como o  $V_{H_2O} = 2000 L$ , conclui-se que o  $V_{TOTAL} = 2001 L$ , de modo que a titulação ocorre segundo a equação química a seguir:



$$\frac{n_{H_2SO_4}}{1} = \frac{n_{NaOH}}{2} \therefore n_{H_2SO_4} = \frac{C_{NaOH} \cdot V_{NaOH}}{2}$$

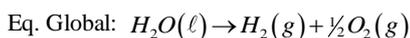
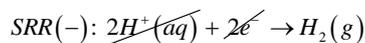
$$n_{H_2SO_4} = \frac{0,1M \cdot 20,4mL}{2} \therefore n_{H_2SO_4} = 1,02 \text{ mmol}$$

$$1,02 \text{ mmol} - 100 \text{ mL}$$

$$\frac{1800}{98} \text{ mol} - V_f$$

$$V_f \cong 1800,7 \text{ L (volume final)}$$

Portanto, o volume eletrolisado foi de 200,3 L. As reações que ocorrem na eletrólise são:



Considerando a  $d_{H_2O} = 1 \text{ g/mL}$  e  $M_{H_2O} = 18 \text{ g/mol}$

$$18 \text{ mL } H_2O - 1,5 \text{ mol GÁS}$$

$$200,3 \cdot 10^3 \text{ mL } H_2O - x$$

$$x \cong 16,7 \cdot 10^3 \text{ mol GÁS}$$

Nas CNTP,  $V_m = 22,4 \text{ L/mol}$

$$1 \text{ mol GÁS} - 22,4 \text{ L}$$

$$16,7 \cdot 10^3 \text{ mol GÁS} - V$$

$$V \cong 373,9 \cdot 10^3 \text{ L (} V \cong 373,9 \text{ m}^3 \text{)}$$

**Alternativa C.**

### ▶ Questão 35

Em todos os seres vivos, as proteínas são um importante grupo de substâncias. Sobre a estrutura das proteínas, analise as afirmativas abaixo.

- I. A estrutura primária de uma proteína é a sequência de alfa-aminoácidos, tais como glicina, alanina e citosina, ligados por ligações peptídicas.
- II. A estrutura secundária é mantida por ligações de hidrogênio entre os grupos -NH e C=O, próximos entre si, na disposição espacial da proteína.
- III. A estrutura terciária é estabilizada por interações hidrofóbicas, hidrofílicas, iônicas e ligações dissulfeto.
- IV. A estrutura quaternária refere-se ao arranjo de múltiplas subunidades polipeptídicas que podem, por ação de agentes químicos ou físicos, ser alteradas ou destruídas através do fenômeno conhecido como desnaturação proteica, perdendo sua atividade biológica.
- V. As proteínas apresentam estruturas geométricas de vários tipos e podem ser caracterizadas pela produção de colorações, como, por exemplo, a reação da proteína da pele com ácido nítrico, formando uma coloração azulada.

A opção que apresenta APENAS afirmativas verdadeiras é:

- a) I e IV.
- b) II e V.
- c) I, II e III.
- d) II, III e IV.
- e) III e V.

### Resolução:

- I. Falsa. Citosina: base nitrogenada
- II. Verdadeira.
- III. Verdadeira.
- IV. Verdadeira.
- V. Falsa. Resulta em uma coloração amarela (teste xantoproteico).

**Alternativa D.**

Analise as afirmativas abaixo.

- I. A imersão de limalha de ferro em um béquer aberto contendo uma solução de ácido clorídrico provoca a liberação de bolhas de gás. Nesse processo, não há realização nem recebimento de trabalho.
- II. Uma solução de ácido iodídrico de concentração igual a  $1,0 \times 10^{-8} \text{ mol.L}^{-1}$  tem pH igual a 8.
- III. Se dois béqueres, um contendo água pura e o outro contendo uma solução insaturada de sacarose, forem submetidos ao aquecimento, a solução de sacarose ebulirá a uma temperatura constante e superior à temperatura de ebulição da água pura.
- IV. Para a reação de combustão completa do gás metano, gerando apenas produtos gasosos, a variações de entalpia e de energia interna têm o mesmo valor.

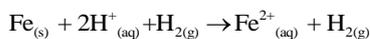
A única alternativa CORRETA é:

- a) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
- b) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
- c) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
- d) Apenas a afirmativa IV é verdadeira.
- e) Todas as afirmativas são falsas.

**Resolução:**

**I. Falsa.**

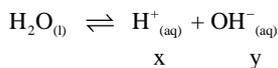
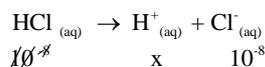
Ocorre a seguinte reação:



O gás formado é o  $\text{H}_2$ , que se expande contra a atmosfera, realizando trabalho.

**II. Falsa.**

O pH = 8 sugerido é incoerente, visto que se trata de uma solução ácida diluída.



$$K_w[\text{H}^+] \cdot [\text{OH}^-] = x \cdot y = 10^{-14}$$

$$y = \frac{10^{-14}}{x}$$

Pelo balanço de cargas:  $[\text{H}^+] = [\text{OH}^-] + [\text{Cl}^-]$

$$x = y + 10^{-8} \therefore x = \frac{10^{-14}}{x} + 10^{-8}$$

Multiplicando por X:

$$x^2 = 10^{-14} + 10^{-8}x \therefore x^2 - 10^{-8}x - 10^{-14} = 0$$

Resolvendo a equação, temos  $x = 1,05 \cdot 10^{-7}$ .

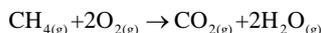
$$[\text{H}^+] = 1,05 \cdot 10^{-7} \text{ mol/L}$$

$$\text{pH} = -\log(1,05 \cdot 10^{-7}) \therefore \text{pH} \cong 6,98$$

**III. Falsa.**

A temperatura de ebulição não será constante, pois se trata de uma mistura comum. Substâncias puras e misturas azeotrópicas são aquelas que apresentam o comportamento descrito.

**IV. Verdadeira.**



$$\Delta H = \Delta U + \Delta n \cdot RT, \text{ como } \Delta n = 0$$

$$\Delta H = \Delta U$$

**Alternativa D.**

**Questão 37**

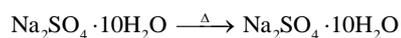
Uma mistura dos sais hidratados  $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$  e  $\text{Na}_2\text{CO}_3 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$ , com massa de 602 kg, é aquecida até a temperatura suficiente para a remoção total da água de hidratação. A massa final da mistura de sais anidros é 242 kg.

Dados:

|  |   |   |
|--|---|---|
| $M_{\text{H}_2\text{O}} = 18,0 \text{ kg.kmol}^{-1}$ | $M_{\text{Na}_2\text{SO}_4} = 142 \text{ kg.kmol}^{-1}$ | $M_{\text{Na}_2\text{CO}_3} = 106 \text{ kg.kmol}^{-1}$ |
|--|---|---|

A razão molar  $\text{Na}_2\text{SO}_4 / \text{Na}_2\text{CO}_3$  entre os sais anidros é:

- a) 1,34
- b) 0,85
- c) 1,13
- d) 1,41
- e) 0,71

**Resolução:**

322 Kg ---- 10 Kmol

$$x \text{ ---- } a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{10x}{322}$$



286 Kg ---- 10 Kmol

$$y \text{ ---- } b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{10y}{286}$$

$$M_{\text{H}_2\text{O}} = 360 \text{ kg} \therefore n_{\text{T}} = 20 \text{ mols}$$

$$a + b = 20 \therefore \frac{10x}{142} + \frac{10y}{106} = 20$$

$$0,0704 x + 0,0943 y = 20$$

$$x + y = 242 \therefore x = 242 - y$$

$$0,0704 (242 - y) + 0,0943 y = 20$$

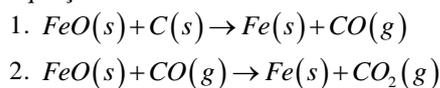
$$17,037 - 0,0704 y + 0,0943 y = 20 \therefore 0,0239 y = 20$$

$$y \cong 123,97 \text{ (1,17 mol)} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{y} \cong 0,71$$

$$x \cong 118,02 \text{ (0,83 mol)}$$

**Alternativa E.**

Óxido de ferro II pode ser reduzido a ferro, tanto por carbono, como por monóxido de carbono, de acordo com o mostrado nas equações 1 e 2:



Os valores de entalpia de formação e de entropia-padrão das substâncias envolvidas em ambas reações são apresentados na tabela:

|   | $\text{FeO}(s)$ | $\text{Fe}(s)$ | $\text{C}(s)$ | $\text{CO}(g)$ | $\text{CO}_2(g)$ |
|---|-----------------|----------------|---------------|----------------|------------------|
| $\Delta H_f^\circ (kJ \cdot mol^{-1})$    | -271,9          | 0              | 0             | -110,5         | -393,5           |
| $S^\circ (J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1})$ | 60,8            | 27,3           | 5,7           | 197,9          | 213,7            |

Considere um meio reacional fechado onde ocorrem as duas reações e que os valores acima permanecem constantes na faixa de 298 a 650 K.

A ÚNICA alternativa correta é:

- A reação 1 é exotérmica e a reação 2 é endotérmica.
- À temperatura aproximada de 627 K, a reação 2 atinge o equilíbrio dinâmico.
- À temperatura de 450 K, a reação 1 é fonte de calor para sustentar a reação 2 na proporção molar aproximada de 15 para 1.
- À temperatura de 450 K, ambas as reações são espontâneas.
- A reação 1 apresenta diminuição de entropia.

**Resolução:**

a) Falsa

$$\Delta H_1 = \sum \Delta H_f(P) - \sum \Delta H_f(R)$$

$$\Delta H_1 = [(-110,5)] - [(-271,9)] \quad \therefore \Delta H_1 = -161,4 \text{ kJ/mol}$$

$$\Delta H_2 = \sum \Delta H_f(P) - \sum \Delta H_f(R)$$

$$\Delta H_2 = [(-393,5)] - [(-271,9) + (-110,5)]$$

$$\Delta H_2 = -11,1 \text{ kJ/mol}$$

b) Verdadeira

$$\Delta S = \sum S(P) - \sum S(R)$$

$$\Delta S_2 = [(213,7) + (27,3)] - [(60,8) + (197,9)]$$

$$\Delta S_2 = 241 - 257,7 \quad \therefore \Delta S_2 = -16,7 \text{ J/K mol}$$

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S \quad \therefore \text{equilíbrio: } \Delta G = 0 \text{ e } T\Delta S = \Delta H$$

$$T_s = \frac{-11,1 \cdot 10^3 \text{ J/mol}}{-16,7 \text{ J/K mol}} \quad \therefore T = 672,1 \text{ K}$$

c) Falsa. A reação 1 é endotérmica (consome calor).

d) Falsa

$$\Delta S_1 = \sum S(P) - \sum S(R)$$

$$\Delta S_1 = [(197,9) + (27,3)] - [(60,5) + (5,7)]$$

$$\Delta S_1 = 225,2 - 66,2 \quad \therefore \Delta S_1 = 159 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$$

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S$$

$$\Delta G_1 = \Delta H_1 - T\Delta S_1 = 161,4 \cdot 10^3 - 450(159)$$

$$\Delta G_1 = 89.550 \text{ J/mol (não espontânea)}$$

$$\Delta G_2 = \Delta H_2 - T\Delta S_2 = -11,1 \cdot 10^3 - 450(-16,7)$$

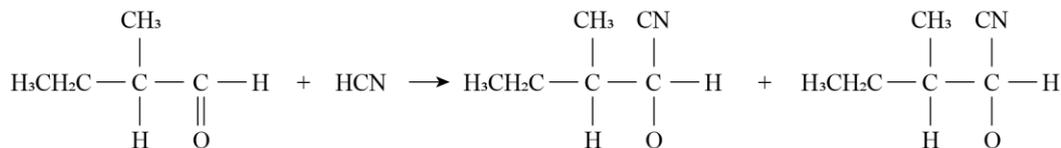
$$\Delta G_2 = -1135 \text{ J/mol (espontânea)}$$

e) Falsa. A Reação 1 decorre com formação de gás, logo, entropia aumenta.

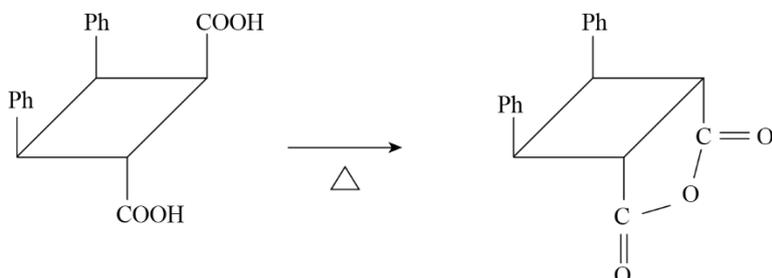
**Alternativa B.**

Considere as três propostas de reação a seguir.

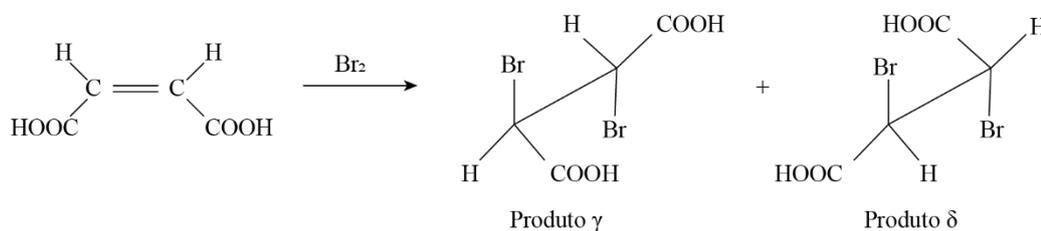
Reação 1:



Reação 2:



Reação 3:

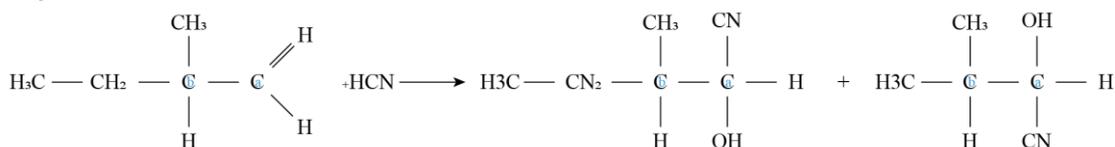


A ÚNICA alternativa correta é:

- Na reação 1, a partir de um reagente opticamente ativo, observa-se nos produtos  $\alpha$  e  $\beta$  a formação de um novo centro quiral, implicando produtos opticamente inativos por conterem um par quiral dextrogiro, levogiro.
- A reação 2 não ocorre.
- A reação 2 é uma reação de condensação intramolecular que produz anidrido.
- Na reação 3, os produtos  $\gamma$  e  $\delta$  são representações de um mesmo composto.
- Na reação 3, o ácido maleico, isômero geométrico do ácido fumárico, reage com bromo produzindo isômeros meso.

### Resolução:

Reação 1

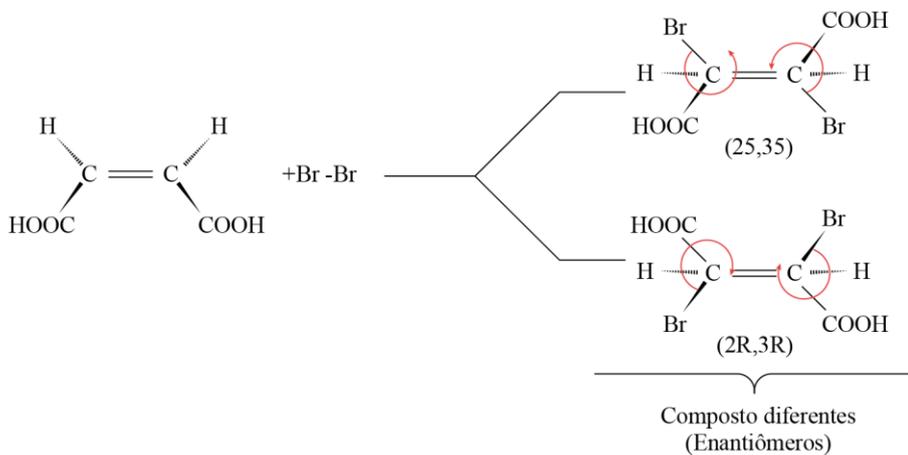


Considere que o composto seja bR. Logo, Logo, os produtos possíveis podem ser bRaS ou bRaR, formando um par de diastereoisômeros.

Reação 2

O isômero trans sofrerá, primeiramente, isomerização, para depois o Cis sofrer desidratação intramolecular, formando o Anidrido (o que torna o item C correto).

Reação 3



**Alternativa C.**

**Questão 40**

Com relação à série de decaimento radioativo do  ${}_{92}\text{U}^{238}$  até o  ${}_{82}\text{Pb}^{206}$ , a única alternativa INCORRETA é:

- a) Na emissão de uma partícula  $\alpha$ , o  ${}_{92}\text{U}^{238}$  decai para um elemento  ${}_{90}\text{X}^{234}$ .
- b) Por não ser físsil, o  ${}_{92}\text{U}^{238}$  não é empregado isoladamente para a geração de energia em reatores nucleares.
- c) Uma partícula  $\alpha$  é emitida espontaneamente por certos núcleos de elementos radioativos, com número atômico maior que 82, como urânio, tório, polônio e rádio.
- d) Na emissão de uma partícula  $\alpha$  e de duas partículas  $\beta$ , o  ${}_{92}\text{U}^{238}$  decai para o seu isótopo  ${}_{92}\text{U}^{234}$ .
- e) A distribuição eletrônica do  ${}_{82}\text{Pb}^{206}$  ( $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^{10} 5p^6 6s^2 4f^{14} 5d^{10} 6p^2$ ) garante sua estabilidade nuclear.

**Resolução:**

$${}_{92}\text{U}^{238} \rightarrow {}_{82}\text{Pb}^{206} + n\alpha + m\beta$$

- a)  ${}_{92}\text{U}^{238} \rightarrow {}_{+2}\alpha^4 + {}_{90}\text{Th}^{234}$
- b)  $\text{U}^{238}$  não é físsil.
- c)  $Z > 82$ . São, geralmente,  $\alpha$  emissor.
- d)  ${}_{92}\text{U}^{238} \rightarrow {}_{+2}\alpha^4 + 2{}_{-1}\beta^0 + {}_p\text{x}^A$

$$\left. \begin{array}{l} 238 = 4 + A \\ A = 234 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 92 = +Z - Z + P \\ P = 92 \end{array} \Rightarrow \text{Isótopo } {}_{92}\text{U}^{234}$$

- e) A estabilidade do núcleo não sofre influência da eletrosfera (falso).

**Alternativa E.**

**Matemática**

Mateus Bezerra  
Kellem Corrêa

**Física**

Anderson Marques  
João Paulo Botelho  
Paulo Wang

**Química**

Heitor Cruz  
Welson Felipe

**Colaboradores**

Alexandre Manso

**Digitação e Diagramação**

Alex de Faria  
Isabella Maciel  
Juan Charles  
Moisés Nascimento

**Ilustração**

Alex de Faria  
Jessica Loumine  
Isabella Maciel  
Moisés Nascimento

**Supervisão Editorial**

Aline Alkmin  
Anderson Marques

**Copyright©Olimpo2023**

*A Resolução Comentada das provas do IME  
poderá ser obtida diretamente no site do **GRUPO OLIMPO**.*

***As escolhas que você fez nesta prova, assim como outras escolhas na vida,  
dependem de conhecimentos, competências e habilidades específicas.  
Esteja preparado.***

[www.grupoolimpo.com.br](http://www.grupoolimpo.com.br)

